

Soluzioni degli esercizi

Capitolo 1

Es 1.1 $x \in A \wedge x \notin B; x \in B \wedge x \notin A; x \in A \wedge x \in B$.

Es 1.2 $\forall x \in A \exists b \in A \text{ t.c. } b \neq a$.

Es 1.3 (1.9): $x \in A \cap (B \cup C) \iff (x \in A) \wedge (x \in B \vee x \in C) \iff (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \iff (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C) \iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(1.10): $x \in A \cup (B \cap C) \iff (x \in A) \vee (x \in B \wedge x \in C) \iff (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \iff (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C) \iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(1.12): $x \in (A \cup B)^c \iff (x \in X) \wedge (x \notin A \cup B) \iff (x \in X) \wedge (x \notin A \wedge x \notin B) \iff (x \in X \wedge x \notin A) \wedge (x \in X \wedge x \notin B) \iff x \in A^c \cap B^c$.

Es 1.4 (1.16): $x \in A \cap \bigcup_{i \in I} A_i \iff (x \in A) \wedge (\exists j \in I | x \in A_j) \iff \bigcup_{i \in I} (A \cap A_i)$.

(1.17): $x \in A \cup \bigcap_{i \in I} A_i \iff (x \in A) \vee (x \in A_i, \forall i \in I) \iff \bigcap_{i \in I} (A \cup A_i)$.

(1.18): $x \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c \iff (x \in X) \wedge \text{non } (\forall i \in I, x \in A_i) \iff$

$(x \in X) \wedge (\exists i \in I | x \notin A_i) \iff x \in \bigcup_{i \in I} A_i^c$.

(1.19): $x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c \iff (x \in X) \wedge \text{non } (\exists i \in I | x \in A_i) \iff$

$(x \in X) \wedge (\forall i \in I, x \notin A_i) \iff x \in \bigcap_{i \in I} A_i^c$.

Es 1.5 Se $A := \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 1\}$, allora $\min A = 0$ e $\max A = 1$; se $B = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 1\}$ allora, B è limitato superiormente (da 1) e inferiormente da 0, ma B non ha né massimo, né minimo: se, per assurdo, B avesse massimo M , poiché $M \in B$ significherebbe che $M < 1$, ma allora il numero $(M + 1)/2$ sarebbe ancora un elemento di B e sarebbe strettamente maggiore di M ottenendo una contraddizione. Analogamente si ragiona per il minimo.

Es 1.6 Supponiamo che sia M che M' siano massimi di A , allora si avrebbe $M' \leq M$ (essendo M massimo) e $M \leq M'$ (essendo M' massimo), quindi $M = M'$. Analogamente si ragiona per il minimo.

2 Soluzioni Esercizi

Es 1.7 Se $x \leq y$, allora $0 = x + (-x) \leq y + (-x)$, ossia $0 \leq x - y$. Se $0 \leq y - x$, allora $0 + x \leq (y - x) + x = y$, ossia $x \leq y$.

Es 1.8 Se $1 := 0 := a$, $\{a\}$ verifica tutti gli assiomi dei numeri reali (eccetto $1 \neq 0$).

Es 1.9 a_2 e a_3 non sono in relazione. Le altre proprietà seguono osservando che $a_i < a_j$ se e solo se $i \leq j$.

Es 1.10 (i): $f(0) = f(-0) = -f(0) \implies 2f(0) = 0 \implies f(0) = 0$.

(ii): $f(x) = f(-x) = -f(x) \implies 2f(x) = 0 \implies f(x) = 0$.

Es 1.11 $A + A = \{2 \leq x < 4\}$. $A - A = \{-1 < x < 1\}$.

Es 1.12 (i): $y = 1 \cdot y = (x^{-1} \cdot x) \cdot y = x^{-1} \cdot (x \cdot y) = x^{-1} \cdot 0 = 0$.

(ii): segue dall'unicità dell'inverso, essendo: $(x \cdot y) \cdot x^{-1} \cdot y^{-1} = y \cdot (x \cdot x^{-1}) \cdot y^{-1} = y \cdot y^{-1} = 1$.

(iii): se $y \leq z$, dalla Proposizione 1.7-(ii) segue che $x \cdot y \leq x \cdot z$. Se $x \cdot y \leq x \cdot z$, allora (per l'Esercizio 1.7) $0 \leq x \cdot (z - y)$; per la Proposizione 1.7-(iv), $x^{-1} \geq 0$ e quindi, per (PO), $0 \leq x^{-1} \cdot (x \cdot (z - y))$, ossia $0 \leq z - y$. In vista di quanto dimostrato, le disuguaglianze strette derivano dalla Proposizione 1.6-(iv): ad esempio, se fosse $x \cdot y = x \cdot z$, allora, $x \cdot (z - y) = 0$, ma allora, per la Proposizione 1.6-(iv), si deve avere $x = 0$ oppure $z = y$, e si avrebbe, in entrambi i casi una contraddizione con le ipotesi fatte.

(iv): Se $x < 0$, $-x > 0$ e la tesi segue dalla Proposizione 1.7-(i) e dal punto (iii).

(v) Per la Proposizione 1.7-(vi), i reciproci di x e y sono strettamente positivi e dal punto

(iii), moltiplicando la relazione $y < x$ per $(xy)^{-1} \stackrel{(ii)}{=} x^{-1} \cdot y^{-1}$ si ha la tesi.

Es 1.13 (i) segue dalle proprietà commutativa e associativa.

(ii): $a \cdot b^{-1} + c \cdot d^{-1} = a \cdot (d \cdot d^{-1}) \cdot b^{-1} + c \cdot (b \cdot b^{-1}) \cdot d^{-1} = (a \cdot d) \cdot (d^{-1} \cdot b^{-1}) + (c \cdot b) \cdot (b^{-1} \cdot d^{-1}) = (a \cdot d)(b \cdot d)^{-1} + (c \cdot b)(b \cdot d)^{-1} = (a \cdot d + c \cdot b)(b \cdot d)^{-1}$.

Es 1.14 Segue dagli assiomi (SO), (PO), (O_4) e dalla definizione di ' $<$ '.

Es 1.15 (i) segue immediatamente dalla definizione.

(ii): $A = -A \iff A \subseteq -A$ e $-A \subseteq A$ e si usa la (i).

Es 1.16 La relazione $A \leq A$ è vera se $A = \emptyset$. Se $A \neq \emptyset$, $A \leq A$ significa $x \leq y$, $\forall x, y \in A$, il che implica $x = y$, $\forall x, y \in A$, ma questo significa che A è costituito da un solo elemento.

Es 1.17 (i) e (ii) derivano immediatamente dalla definizione.

(iii): si considerano separatamente i casi $x, y \geq 0$, $x \leq 0 \leq y$ e $x, y \leq 0$ e si usa il punto (iii) della Proposizione 1.7.

Es 1.18 Se, per assurdo, fosse $x > y$, si prenda $\varepsilon = (x - y)/2 > 0$ e si avrebbe $x \leq y + \varepsilon = y + (x - y)/2 = (x + y)/2$ il che equivale a $x \leq y$, che contraddice $x > y$.

Es 1.19 La formula è simmetrica in x e y (ossia non cambia se si sostituisce x con y e y con x); dunque, possiamo assumere che $x \leq y$, nel qual caso $\min\{x, y\} + \frac{|y-x|}{2} = x + \frac{y-x}{2} = \frac{x+y}{2}$.

Es 1.20 (i): $\chi_{A \cap B}(x) = 1 \iff x \in A \cap B \iff x \in A \text{ e } x \in B \iff \chi_A(x) = 1 \text{ e } \chi_B(x) = 1 \iff \chi_A(x) \cdot \chi_B(x) = 1$.

(ii): se $x \in A \setminus B$, allora $\chi_{A \cup B}(x) = 1$, $\chi_A(x) = 1$, $\chi_B(x) = 0$ e quindi l'uguaglianza vale; analogamente se $x \in B \setminus A$; se $x \in A \cap B$, allora $\chi_{A \cup B}(x) = 1 = \chi_A(x) = \chi_B(x)$ e l'uguaglianza vale; infine, se $x \notin A \cup B$, allora $\chi_{A \cup B}(x) = 0 = \chi_A(x) = \chi_B(x)$ e vale l'uguaglianza.

Es 1.21 (i): Se f è crescente e $x < y$, allora $f(x) \leq f(y)$ e quindi $-f(y) \leq -f(x)$ ossia $(-f)$ è decrescente. Le altre affermazioni si verificano analogamente.

(ii): se f è crescente e $x < y$, allora $f(x) \leq f(y)$ e quindi (essendo $f(x)$ e $f(y)$ numeri positivi) $1/f(y) \leq 1/f(x)$, ossia, $1/f$ è decrescente. Le altre affermazioni si verificano analogamente.

(iii): se f è strettamente crescente e $y_1 < y_2$ sono due punti di $B = \text{im}(f)$, allora esistono due unici punti (distinti) $x_1, x_2 \in A$ tali che $f(x_i) = y_i$ e, infatti, $x_i = f^{-1}(y_i)$. Se fosse $x_1 > x_2$ si avrebbe $f(x_1) = y_1 > f(x_2) = y_2$, contraddicendo la nostra ipotesi. Dunque deve essere $x_1 < x_2$ (essendo $x_1 \neq x_2$), ossia, $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, il che prova che f^{-1} è strettamente crescente. Le altre affermazioni si verificano analogamente.

(iv) Se f e g sono crescenti e $x < y$, allora $g(x) \leq g(y)$ e quindi $f(g(x)) \leq f(g(y))$, ossia, $f \circ g$ è crescente.

Se f e g sono decrescenti e $x < y$, allora $g(x) \geq g(y)$ e quindi $f(g(x)) \leq f(g(y))$, ossia, $f \circ g$ è crescente.

Se f è crescente e g decrescente e $x < y$, allora $g(x) \geq g(y)$ e quindi $f(g(y)) \leq f(g(x))$, ossia, $f \circ g$ è decrescente. Le altre affermazioni si verificano analogamente.

Es 1.22 La prima parte segue immediatamente per induzione su m .

Sia $I := \{x \mid 0 \leq x \leq 1/4\} \cup \{x \geq 1\}$: I è induttivo ma $1/4 + 1/4 = 1/2 \notin I$.

Es 1.23 (i): per $m = 1$, $n + m = n + 1 \in \mathbb{N}$ essendo $\mathbb{N}$ induttivo; assumiamo $n + m \in \mathbb{N}$, allora (di nuovo, essendo $\mathbb{N}$ induttivo), $n + (m + 1) = (n + m) + 1 \in \mathbb{N}$, e il risultato segue per induzione.

(ii): se $m = 1$, la tesi è ovviamente vera; se $nm \in \mathbb{N}$, allora $n(m + 1) = nm + n \in \mathbb{N}$ per (i), e il risultato segue per induzione.

Es 1.24 (P_1) e (P_3) seguono essendo $\mathbb{N}$ un insieme induttivo; (P_2) segue dalla Proposizione 1.20; (P_4) segue dalla legge di cancellazione (Proposizione 1.6-(i)); (P_5) è vera, essendo $\mathbb{N}$, per definizione, il più piccolo insieme induttivo.

Es 1.25 Un maggiorante dell'insieme $A := \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 \leq N\}$ è, ad esempio, N : se così non fosse esisterebbe $n \in A$ tale che $n > N$, ossia, $n \geq N + 1$ ed elevando al quadrato tale relazione, si avrebbe $n^2 \geq N^2 + 2N + 1 > N$, il che implica $n \notin A$ (contraddizione).

Es 1.26 (i): per $n = 3$ la relazione vale con l'uguale; assumiamo $n^2 \geq 3 + 2n$. Allora, si ha $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 \geq 3 + 2n + 2n + 1 = 3 + 4n + 1 \geq 3 + 2(n + 1)$, essendo

4 Soluzioni Esercizi

quest'ultima relazione equivalente a $2n + 1 \geq 2$ (che è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$).

(ii) per $n = 1$ l'uguaglianza vale (essendo $4 = 2 \cdot 2$); assumiamo $n^2 + 3n = 2m$ con $m \in \mathbb{N}$. Allora, $(n + 1)^2 + 3(n + 1) = 2(m + n + 2)$, e il risultato segue per induzione.

Es 1.27 Seguono immediatamente dalle definizioni ricorsive di somma; ad esempio per (ii) si ha: per $n = 1$ l'affermazione è vera; assumendo (ii) si ha:

$$\sum_{k=1}^{n+1} c \cdot a_k = \left(\sum_{k=1}^n c \cdot a_k \right) + c \cdot a_{n+1} \stackrel{(ii)}{=} c \cdot \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) + c \cdot a_{n+1} = c \cdot \left(\sum_{k=1}^n a_k + a_{n+1} \right) = c \cdot \sum_{k=1}^{n+1} a_k.$$

Es 1.28 (i) Per $n = 1$ è vera. Assumiamo (ii), allora

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^n k + (n+1) \stackrel{(ii)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

(ii): Per $n = 1$ è vera. Assumiamo (ii), allora

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 \stackrel{(ii)}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n^2 + 2n + 1)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)((n+2)(2n+3))}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}. \end{aligned}$$

Es 1.29 $N = 5$. Infatti, per $n \leq 4$, $2^n < n^2 + 6$ e $2^5 > 5^2 + 6$. Assumiamo ora (induzione) che $2^n \geq n^2 + 6$ con $n \geq 5$; allora $2^{n+1} \geq 2 \cdot (n^2 + 6) = 2n^2 + 12$ e $2n^2 + 12 > (n+1)^2 + 6 \iff n^2 - 2n + 5 > 0$ il che è sempre vero (essendo $n^2 - 2n + 5 = (n-1)^2 + 4$).

Es 1.30 Per l'Esercizio 1.29, $2^n > n^2$ per $n \geq 5$. Dunque se $N = \max\{M, 5\}$, $2^n/n > M$.

Es 1.31 (ii) Induzione su m : per $m = 1$ è vera. Assumiamo (ii), allora

$$(x^n)^{m+1} = (x^n)^m \cdot x^n \stackrel{(ii)}{=} x^{nm} \cdot x^n \stackrel{(i)}{=} x^{nm+n} = x^{n(m+1)}.$$

(iii) Induzione su n : per $n = 1$ è vera. Assumiamo (iii), allora

$$x^{n+1}y^{n+1} \stackrel{(i)}{=} x^n y^n xy \stackrel{(iii)}{=} (xy)^n (xy) \stackrel{(i)}{=} (xy)^{n+1}.$$

Es 1.32 (i) Per la Proposizione 1.30–(iii) si ha: $(y^{-1})^n y^n = (y^{-1}y)^n = 1^n = 1$ e quindi, per l'unicità dell'opposto segue la tesi.

(ii) Per la Proposizione 1.30–(iii) si ha: $(xy^{-1})^n = x^n(y^{-1})^n \stackrel{(i)}{=} x^n(y^n)^{-1}$.

Es 1.33 Segue per induzione su n e dal Lemma 1.37–(iii).

Es 1.34 Per induzione su $k \geq 1$: per $k = 1$, vale l'uguaglianza (per definizione); assumiamo $\binom{n+k}{k} \geq n+1$. Allora, per il punto (iii) del Lemma 1.37, si ha

$$\binom{n+k+1}{k+1} = \binom{n+k}{k+1} + \binom{n+k}{k} \geq \binom{n+k}{k+1} + n+1 \geq 1+n+1 = (n+1)+1.$$

Es 1.35 Osservazione 1.40–(i): Sia $m := 1 - n$, allora $n < x < n+1 \iff 1 = m+n < x+m < m+n+1 = 2$, il che implica che $1 < x+m \notin \mathbb{N}$ e quindi $x \notin \mathbb{Z}$.
Osservazione 1.40–(ii): Sia $p := 1 - m$, allora

$$n > m \iff p+n > p+m = 1 \implies p+n \geq 2 \iff n \geq m+1.$$

La successione $b : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ definita come $b_0 = 1$, $b_k = 2k$ se $k > 0$, $b_k = -2k+1$ se $k < 0$ è la funzione inversa di a .

Es 1.36 Se $n, m \in \mathbb{N}_0$, il risultato è stato dimostrato (Proposizione 1.30).

Assumiamo, quindi, che o n o m non siano numeri naturali.

(i) Se $n+m = 0$, $m = -n$ e la (i) è conseguenza di (1.43) e (1.29). Supponiamo $n+m > 0$; in tal caso (essendo la formula simmetrica in n e m) possiamo assumere $n > 0 > m$. Allora, per la Proposizione 1.30,

$$x^{n+m} \stackrel{(1.45)}{=} x^{n+m} x^{-m} x^m = x^{n+m-m} x^m = x^n x^m.$$

Se $n+m < 0$, da (1.45), segue che

$$x^{n+m} = (x^{-n-m})^{-1} = (x^{-n} x^{-m})^{-1} = x^n x^m.$$

(ii) e (iii) seguono dal Lemma 1.43. Ad esempio, se $n = -k < 0 < m$, si ha

$$(x^n)^m = (x^{-k})^m = ((x^{-1})^k)^m = (x^{-1})^{km} = x^{-km} = x^{nm}.$$

Es 1.37 Se d non fosse primo si avrebbe $d = nm$ con $1 < n, m < d$, ma allora P conterebbe un multiplo di m con $m < d$.

Es 1.38 2 è primo. Togliendo i multipli di 2 da $P_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid 2 \leq n \leq 100\}$ si ottiene l'insieme P_2 dei numeri dispari tra 2 e 100 e $\min P_2 = 3$; quindi (Es 1.37) 3 è primo. Togliendo i multipli di 3 da P_2 otteniamo l'insieme $P_3 = \{5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 55, 59, 61, 65, 67, 71, 73, 77, 79, 83, 85, 89, 91, 95, 97\}$,

per cui 5 è primo. Togliendo i multipli di 5 da P_3 , otteniamo l'insieme $P_4 = \{7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 77, 79, 83, 89, 91, 97\}$, per cui 7 è primo. Togliendo i multipli di 7 da P_4 , otteniamo l'insieme

$$P_5 = \{11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97\}.$$

Si noti, ora, che con questo procedimento P_n non contiene multipli di numeri primi p con $p < d = \min P_n$ (che è anche primo). In particolare P_5 non contiene multipli di 2, 3, 5, 7 e neanche multipli di 4, 6, 8, 10 (essendo multipli di 2) e di 9 (che è multiplo di 3). In definitiva P_5 non contiene multipli di 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Ma allora se ci fosse un numero composto dovrebbe essere della forma $k \cdot m$ con $k, m \geq 11$ e quindi $k \cdot m \geq 121$ il che non è possibile perchè $P_5 \subseteq P_1$ il cui massimo è 100. Dunque P_5 contiene esattamente tutti i numeri primi più piccoli di 100.

Es 1.39 Siano $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ biunivoche.

Siano $x_1, x_2 \in A$ e siano $y_i := f(x_i)$. Se $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$ allora $g(y_1) = g(y_2)$ ed essendo g iniettiva, si ha che $y_1 = y_2$ e cioè $f(x_1) = f(x_2)$ per cui (iniettività di f) $x_1 = x_2$. Quindi $g \circ f$ è iniettiva.

Sia $z \in C$. Essendo g suriettiva, esiste $y \in B$ tale che $z = g(y)$. Essendo f suriettiva esiste $x \in A$ tale che $y = f(x)$. Quindi $z = g \circ f(x)$, ossia, $g \circ f$ è anche suriettiva.

Es 1.40 Sostituendo a E_n , gli insiemi $E_n \setminus \bigcup_{1 \leq k \leq n-1} E_k$, possiamo assumere che gli E_n siano a due a due disgiunti.

Se $\bigcup E_n = \emptyset$ significa che $E_n = \emptyset$ per ogni n ed il risultato è vero.

Assumiamo che $\bigcup E_n \neq \emptyset$. Poiché $\bigcup E_n = \bigcup_{n \mid E_n \neq \emptyset} E_n$, si può assumere anche che $E_n \neq \emptyset$ per ogni n .

Sia $\mathcal{I} := \{n \in \mathbb{N} \mid E_n \text{ è finito}\}$ e $\mathcal{I}' := \{n \in \mathbb{N} \mid E_n \text{ è numerabile}\}$, allora $\mathcal{I} \cap \mathcal{I}' = \emptyset$ e $\mathcal{I} \cup \mathcal{I}' = \mathbb{N}$. Se $\mathcal{I}$ è finito, chiaramente, $\bigcup_{n \in \mathcal{I}} E_n$ è finito; se $\mathcal{I}$ è numerabile $\bigcup_{n \in \mathcal{I}} E_n$ è unione numerabile di insiemi finiti e quindi è numerabile. La tesi segue osservando che l'unione di un insieme finito o numerabile con uno numerabile è numerabile.

Es 1.41 Il “se” è ovvio. Dobbiamo dimostrare il “solo se”, ossia che se $\sigma : \mathcal{F}_n \rightarrow \mathcal{F}_n$ è strettamente crescente e suriettiva, allora $\sigma(i) = i$ per ogni i . Poiché σ è strettamente crescente, per induzione (finita), segue che $\sigma(i) \geq i$ per ogni i . Se $\sigma(i) = i$ per ogni i abbiamo fatto. Supponiamo, per assurdo che esista i tale che $\sigma(i) > i$, allora l'insieme $F = \{i \in \mathcal{F}_n \mid \sigma(i) > i\} \neq \emptyset$. Ma allora se $j = \min F$, $j \notin \sigma(\mathcal{F}_n)$ e quindi σ non sarebbe suriettiva, ottenendo una contraddizione.

Es 1.42 Supponiamo, per assurdo, che l'insieme dei numeri primi P sia finito, ossia, che $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\}$ con p_j primo e $p_i \neq p_j$ se $i \neq j$. Si consideri il numero naturale $p = \left(\prod_{1 \leq i \leq n} p_i\right) + 1$. Chiaramente, p non è divisibile per nessun p_j (poiché, essendo, $\forall j, p_j \geq 2, p/p_j = \prod_{i \neq j} p_i + 1/p_j$ non è intero), ma questo significa che p è primo e che $p > p_i$ per ogni i , il che contraddice l'ipotesi che P contenga tutti i numeri primi.

Es 1.43 Sia N un insieme numerabile e $E \subseteq N$ un suo sottoinsieme non vuoto. Se E è finito, abbiamo fatto. Se E non è finito, allora, per la Proposizione 1.67 è numerabile.

Es 1.44 Siano $x, y \in X$ e supponiamo $\varphi(x) = \varphi(y)$. Poiché $\varphi(A) \subseteq A$ e $\varphi(B) \subseteq B$ ci sono due casi: o $x, y \in A$ oppure $x, y \in B$. Poiché φ è iniettiva sia su A che su B segue, in entrambi i casi, che $x = y$ e quindi φ è iniettiva su X .

Es 1.45 Se $F = \emptyset$, il risultato è ovvio. Sia $F = \{a_1, \dots, a_n\}$ con $a_i \neq a_j$ se $i \neq j$. $\#(E \setminus F) = \infty$ (altrimenti E sarebbe finito, essendo l'unione di due insiemi finiti finiti) e per la Proposizione 1.66-(i), esiste $N \subseteq E \setminus F$ numerabile. Definiamo $\tilde{E} := E \setminus (N \sqcup F)$; tale $\tilde{E}$ potrebbe essere vuoto, ma, in ogni caso, $E = F \sqcup N \sqcup \tilde{E}$. Poiché N è numerabile $N = \{b_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, con $b_i \neq b_j$ se $i \neq j$. Sia ora $\alpha_j := a_j$ per $j \leq n$ e $\alpha_{j+k} := b_k$ per $k \geq 1$. Chiaramente, la successione $\{\alpha_j\}$ è iniettiva e la sua immagine è $F \sqcup N$. Sia $\psi : E \rightarrow E$ la seguente mappa: su $F \sqcup N = \{\alpha_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $\psi(\alpha_i) = \alpha_{i+n}$ e su $\tilde{E}$ (se non vuoto), ψ è l'identità. Su $F \sqcup N$, ψ è iniettiva e $\psi(F \sqcup N) = N$. Ovviamente, su $\tilde{E}$ (se non vuoto) ψ è iniettiva. Inoltre $\psi(F \sqcup N) = N \subseteq F \sqcup N$ e $\psi(\tilde{E}) = \tilde{E}$, quindi (Es 1.44) ψ è iniettiva su E . Dunque $E \stackrel{\psi}{\cong} E \setminus F$.

Es 1.46 Segue dalla definizione di estremo superiore e inferiore osservando che $\mathcal{M}_A = -\mathcal{M}'_{-A}$ e, equivalentemente, $\mathcal{M}'_A = -\mathcal{M}_{-A}$.

Es 1.47 Se applichiamo (i) all'insieme $(-A)$ e poniamo $\underline{s} := -\bar{s}$, $s = -t$, $y = -x$, per la (1.52) otteniamo: " $\underline{s} = \inf A$ se e solo se $\underline{s}$ è un minorante di A e per ogni $s > \underline{s}$ esiste $y \in A$ tale che $y < t$ ", che è l'affermazione (ii) (con altri simboli per t e x).

Es 1.48 Segue osservando che se $A \leq B$, e se $\alpha = \sup A$ e $\beta = \inf B$, allora $\alpha \leq \beta$ e α e β sono elementi separatori tra A e B .

Es 1.49 Segue, ad esempio, moltiplicando per c la caratterizzazione di estremo superiore.

Es 1.50 No: se $A = \{x \mid 0 < x < 1\}$ e $x = 0$, allora $d(x, A) = 0$ ma $x \notin A$.

Es 1.51 $[x]$ è l'unico intero tale che $[x] \leq x < [x] + 1$, ma questo implica $[x] + 1 \leq x + 1 < ([x] + 1) + 1$, ed essendo $[x] + 1$ intero, segue che $[x] + 1 = [x + 1]$.
 $\{x + 1\} := (x + 1) - [x + 1] = (x + 1) - ([x] + 1) = x - [x] =: \{x\}$.

Es 1.52 Per induzione si vede subito che $f(x + nT) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Si osservi poi che $f(x) = f(x - T + T) = f(x - T)$ e quindi, per induzione su $n \in \mathbb{N}$, segue che $f(x - nT) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e ogni $n \in \mathbb{N}$.

Es 1.53 Poiché $n \leq x < n + 1$, se k, h sono interi con $h \leq n$ e $k \geq n + 1$, si ha $|x - h| = x - h \leq x - n$ e $|x - k| = k - x \geq n + 1 - x$. Quindi, $d := \min\{x - n, n + 1 - x\} \leq \min\{|x - h|, |k - x|\}$, da cui $d = \text{dist}\{x, \mathbb{Z}\}$.

Es 1.54 Sia $n = [x]$. Allora, $x \leq n < x + 1$, ma poiché $x \notin \mathbb{Z}$ si deve avere $x < n < x + 1$. Se anche $m \in \mathbb{Z}$ soddisfa $x < m < x + 1$, e fosse $n \neq m$, allora o $n > m$ o $m > n$; nel primo caso, si avrebbe $0 < n - m < (x + 1) - x = 1$ il che è impossibile; analogamente nel caso $m > n$. Quindi tale n è unico.

Es 1.55 Sia $k = \frac{m-1}{2}$. Se $k \in \mathbb{Z}$, allora $m = 2k+1$ è dispari e abbiamo fatto. Supponiamo, per assurdo, che $k \notin \mathbb{Z}$. Allora, (per l'Esercizio 1.54), $\exists! j \in \mathbb{Z}$ t.c. $\frac{m-1}{2} < j < \frac{m-1}{2} + 1 = \frac{m+1}{2}$, ossia, $m < 2j+1 < m+2$. Ma tra m e $m+2$ (esclusi) c'è solo un intero, ossia, $m+1$ e quindi $m+1 = 2j+1$, che vuol dire $m = 2j$, ossia, m pari, contro l'ipotesi.

Es 1.56 Sia $A := \{h \in \mathbb{N} \text{ t.c. } 2^h | m\}$. Poiché m è pari, $2|m$, ossia, $1 \in A$, che quindi è non vuoto. Inoltre, m è un maggiorante: dalla disuguaglianza di Bernoulli, segue che $2^m = (1+1)^m \geq 1+m > m$, quindi 2^m non può essere un divisore di m . Dal Corollario 1.25 segue che A ha un massimo $k \in \mathbb{N}$, ossia, $\exists! n \in \mathbb{N}$ tale che $2^k n = m$. Tale n deve essere dispari (qui stiamo usando l'Esercizio 1.55, altrimenti, se fosse $n = 2p$ si avrebbe $2^k \cdot 2p = m$, ossia, $2^{k+1}p = m$, il che vorrebbe dire che $k+1 \in A$ contraddicendo la massimalità di k).

Es 1.57 Sia $x := n/|d| \in \mathbb{Q}$, $q := [x] \operatorname{sgn}(d) \in \mathbb{Z}$ e $r := \{x\}|d|$. Allora, da (1.46) segue che $n/|d| = x = [x] + \{x\}$ e quindi (si ricordi ((1.24)) che $d = \operatorname{sgn}(d)|d|$) che $n = [x]|d| + \{x\}|d|$ ossia $n = qd + r$ (relazione che mostra che $r \in \mathbb{Z}$); poiché $0 \leq \{x\} < 1$ segue che $0 \leq r = \{x\}|d| < |d|$.

Unicità: supponiamo $n = dq + r = dq' + r'$. Se $r = r'$, chiaramente $q = q'$. Assumiamo, per assurdo, $r' \neq r$, ad esempio, che $r' > r$. Allora, si avrebbe $r' - r = d(q - q')$, ossia $(r' - r)/|d| \in \mathbb{Z}$ il che è assurdo essendo $0 < (r' - r)/|d| < 1$.

Es 1.58 Da (1.37) (con $x = y + \varepsilon$), essendo $0 < \varepsilon < y$, segue

$$\begin{aligned} (y + \varepsilon)^n - y^n &\stackrel{(1.37)}{=} \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} (y + \varepsilon)^{n-1-k} y^k < \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} (2y)^{n-1-k} y^k \\ &= \varepsilon y^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-1-k} = \varepsilon y^{n-1} (2^n - 1) \\ &< 2^n \varepsilon y^{n-1}. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} y^n - (y - \varepsilon)^n &\stackrel{(1.37)}{=} \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} y^{n-1-k} (y - \varepsilon)^k < \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} y^{n-1-k} y^k \\ &= \varepsilon y^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n \varepsilon y^{n-1}. \end{aligned}$$

Es 1.59 Sia $y = \sup R_n$; cfr. (1.59), ($n \geq 3$). Bisogna far vedere che $y^n = x$. Supponiamo, per assurdo, che $y^n < x$ e sia $0 < \varepsilon < \min\{y, \frac{x - y^n}{2^n y^{n-1}}\}$. Allora, dalla prima relazione in (1.68) e dalla scelta di ε segue che

$$(y + \varepsilon)^n < y^n + 2^n \varepsilon y^{n-1} < x,$$

ossia, $y + \varepsilon \in R_n$ contraddicendo il fatto che y è un maggiorante di R_n .

Supponiamo, ora, per assurdo, che $y^n > x$ e sia $0 < \varepsilon < \min\left\{y, \frac{x - y^n}{ny^{n-1}}\right\}$. Allora, dalla seconda relazione in (1.68) e dalla scelta di ε , se $t \in R_n$, segue che

$$(y - \varepsilon)^n > y^n - ny^{n-1}\varepsilon > x > t^n,$$

e quindi $(y - \varepsilon) > t$, ossia, $y - \varepsilon$ sarebbe un maggiorante che contraddice il fatto che y è il più piccolo dei maggioranti. In conclusione $y^n = x$.

Es 1.60 Se $y^{\frac{1}{n}} < x^{\frac{1}{n}}$, dalla Proposizione 1.31-(iv) segue che $y = (y^{\frac{1}{n}})^n < (x^{\frac{1}{n}})^n = x$. Sia $0 \leq y < x$. Se (per assurdo) fosse $y^{\frac{1}{n}} \geq x^{\frac{1}{n}}$, dall'unicità della radice, si avrebbe $y^{\frac{1}{n}} > x^{\frac{1}{n}}$ e, dalla Proposizione 1.31-(iv), seguirebbe $y > x$ e cioè una contraddizione.

Es 1.61 Essendo $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \notin A \cup B$ e da questo segue anche che $A \cup B = \mathbb{Q}$. Per la densità dei razionali in $\mathbb{R}$, segue che, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono $x, y \in \mathbb{Q}$, tali che $\sqrt{2} - \varepsilon/2 < x < \sqrt{2} < y < \sqrt{2} + \varepsilon/2$ e quindi $0 < y - x < \varepsilon$, ossia, A e B sono contigui e $\sqrt{2}$ è l'elemento separatore.

Es 1.62] Dati $x < y$, per la densità dei razionali in $\mathbb{R}$, segue che esiste $r \in \mathbb{Q}$, tale che $x/\sqrt{2} < r < y/\sqrt{2}$, ossia $x < r\sqrt{2} < y$ e $r\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Es 1.63 Sia $n > 0$. Allora, $(x^{\frac{1}{n}}y^{\frac{1}{n}})^n = (x^{\frac{1}{n}})^n(y^{\frac{1}{n}})^n = 1$ e la tesi segue per l'unicità della radice n -sima. Se $n < 0$, la tesi segue dal risultato precedente e dalla (1.45).

Se $n, m > 0$, $\left((x^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}}\right)^{nm} = \left(\left((x^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}}\right)^m\right)^n = \left((x^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}m}\right)^n = \left((x^{\frac{1}{n}})^1\right)^n = x$ e la tesi segue per l'unicità della radice n -sima. Gli altri casi seguono facilmente da (1.45).

Es 1.64 Seguono immediatamente dalle identità $a^r = a^{(p/q)} = (a^p)^{\frac{1}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p$, (dove $r = p/q$).

Es 1.65 Se $0 < a < 1$, allora $a^{-1} > 1$ e da (1.64) segue che $(a^{-1})^s > (a^{-1})^r$ e quindi $a^r > a^s$.

Es 1.66 $\sqrt[n]{y} - \sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{y-x} \iff \sqrt[n]{y} \leq \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y-x} \iff y \leq (\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y-x})^n$, che è vera come segue subito dalla formula del binomio di Newton.

La (1.69) è simmetrica in y, x e possiamo dunque assumere che $y \geq x$, nel qual caso deriva immediatamente dalla precedente relazione (per $n = 2$).

Es 1.67 Dalle definizioni date segue subito che

$$((-1)^p)^{1/q} = ((-1)^{1/q})^p =: (-1)^{p/q}.$$

Quindi, per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$(x^p)^{1/q} = ((-1)^p |x|^p)^{1/q} = (-1)^{p/q} |x|^{p/q} = ((-1)^{1/q} |x|^{1/q})^p = (x^{1/q})^p.$$

Es 1.68 (i) si verifica con calcoli algebrici elementare.

(ii) Grazie a (i), $p(x) = 0 \iff (x - x_0)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$, da cui seguono immediatamente le formule per l'insieme Z degli zeri di p .

(iii) Se $a > 0$, $p(x) = a(x - x_0)^2 - \Delta/(4a) \geq p(x_0) = -\Delta/(4a) = \min p$. Osserviamo ora che la funzione $y \in \mathbb{R} \mapsto y^2$ non è limitata superiormente (se $M > 0$ e $|y| > \sqrt{M}$, allora $y^2 > M$) ed è strettamente crescente su $\{y \geq 0\}$ e strettamente decrescente su $\{y \leq 0\}$ (se $x < y \leq 0$, allora $0 < -y < -x$ e quindi $0 \leq y^2 < x^2$): da questo segue che p è strettamente crescente su $\{x \geq x_0\}$ e strettamente decrescente su $\{x \leq x_0\}$.

(iv) si riduce al caso precedente considerando la parabola $-p(x) = -ax^2 - bx - c$.

Es 1.69 Se $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, $x = \operatorname{Re} z$ e $y = \operatorname{Im} z$:

$$\begin{aligned}(2 + 3i)^3 &= -46 + 9i; \\ \frac{1}{\sqrt{2} - 2i} &= \frac{\sqrt{2} + 2i}{(\sqrt{2} - 2i)(\sqrt{2} + 2i)} = \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{i}{3}; \\ \frac{1 - i}{1 + i} &= -i; \\ i^{2k} &= (-1)^k, \quad i^{2k+1} = (-1)^k i.\end{aligned}$$

Es 1.70 La dimostrazioni delle Proposizioni 1.38 e refpro:sommegeometrica valgono parola per parola se $a, b \in \mathbb{C}$ e $x \in \mathbb{C}$.

Es 1.71 Sia $\tilde{P}(w) := P(z_0 + w) = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 w + \dots + \tilde{a}_n w^n$ con w nuova variabile complessa e $\tilde{a}_k \in \mathbb{C}$ opportuni. Allora, $\tilde{a}_0 = \tilde{P}(0) = P(z_0) = 0$, quindi $\tilde{P}(w) = \tilde{a}_1 w + \dots + \tilde{a}_n w^n = w \cdot (\tilde{a}_1 + \dots + \tilde{a}_n w^{n-1})$ da cui, ponendo $w = (z - z_0)$, si ottiene $P(z) = (z - z_0)Q(z)$ con $Q(z) := \tilde{a}_1 + \dots + \tilde{a}_n(z - z_0)^{n-1}$.

Es 1.72 Dato $w = \alpha + i\beta$, sia $z = x + iy$, cosicché

$$z^2 = w \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = \alpha \\ 2xy = \beta \end{cases} \quad (*)$$

Caso 1: $\beta = 0$. Allora, $xy = 0$ e quindi o $x = 0$ oppure $y = 0$. Se anche $\alpha = 0$ (ossia $w = 0$), allora, $|x| = |y| = 0$ e quindi, se $w = 0$, l'unica soluzione è $z = 0$. Se $\alpha > 0$, necessariamente $y = 0$, e $x = \pm\sqrt{\alpha}$. Se $\alpha < 0$, necessariamente $x = 0$, e $y = \pm\sqrt{-\alpha}$. Riassumendo

$$\begin{aligned}\beta = 0, \alpha = 0 &\implies z = 0; \\ \beta = 0, \alpha > 0 &\implies z = \pm\sqrt{\alpha}, \\ \beta = 0, \alpha < 0 &\implies z = \pm i\sqrt{-\alpha}.\end{aligned}$$

Caso 2: $\beta \neq 0$. In questo caso $2xy = \beta$ implica che sia x che y non sono mai zero e quindi, inserendo $y = \beta/(2x)$, nella prima equazione in (*) otteniamo l'equazione biquadratica

$$x^4 - \alpha x^2 - \frac{\beta^2}{4} = 0,$$

che ha soluzioni: $x^2 = (\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})/2$, in cui va scartato il segno meno (altrimenti si otterrebbe l'equazione impossibile $x^2 < 0$). Dunque, si deve avere

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{\theta}, \\ y = \pm\frac{\beta}{2\sqrt{\theta}}, \end{cases} \quad \theta := \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{2}.$$

0, equivalentemente,

$$z = z_{\pm} := \pm\left(\sqrt{\theta} + i\frac{\beta}{2\sqrt{\theta}}\right), \quad \theta := \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}{2}.$$

Es 1.73

$$P(z) = 0 \iff Q(z) = 0 \quad \text{con} \quad Q(z) := z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}.$$

Inoltre, se $\Delta := b^2 - 4ac$,

$$Q(z) = \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Dunque, per l'Es 1.72, se $\Delta = 0$ si ha un'unica soluzione di $P(z) = 0$ data da $z = -b/2a$, mentre se $\Delta \neq 0$ ci sono esattamente due soluzioni date da

$$z_{\pm} = -\frac{b}{2a} + w_{\pm}, \quad \text{dove} \quad w_{\pm} \text{ sono le due soluzioni di } w^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Capitolo 2

Es 2.1 Si può prendere $\delta = \min\{1/2, \varepsilon/16\}$. Infatti, ponendo $y = -x$ e $y_0 = 1$, si ha

$$|f(x)| = |f(-y)| < \frac{|y| - 1}{y^4} < 16(|y| - 1) \leq 16|y - 1| < \varepsilon$$

(si noti che $y > 1/2$ se $|y - 1| < 1/2$).

Es 2.2 (i) Dato $\varepsilon > 0$ dobbiamo trovare $\delta > 0$ tale che $|1 + |x|^{1/3} - 1| = |x|^{1/3} < \varepsilon$ se $0 < |x| < \delta$. Quindi, possiamo prendere $\delta = \varepsilon^3$.

(ii) Dato $M > 0$ dobbiamo trovare $\delta > 0$ tale che

$$\frac{x^2 + 1}{(1 - x)^4} > M, \quad \forall 0 < |x - 1| < \delta.$$

Innanzitutto, osserviamo che $x^2 + 1 \geq 1$. Quindi,

$$\frac{x^2 + 1}{(1 - x)^4} \geq \frac{1}{(1 - x)^4}.$$

Ora, la disequazione $\frac{1}{(1 - x)^4} > M$ è equivalente a $(1 - x)^4 < 1/M$ che è verificata se $0 < |1 - x| < 1/M^{1/4}$. Quindi, possiamo prendere $\delta := 1/M^{1/4}$.

(iii): Sia $a_n := \frac{n^5 - 3n^3 + 1}{(n^2 - 1)(3 - n^3)}$. Dato ε , dobbiamo trovare $N > 0$ tale che, per ogni $n > N$ si abbia $|a_n + 1| < \varepsilon$. Ora,

$$|a_n + 1| = \left| \frac{n^5 - 3n^3 + 1}{(n^2 - 1)(3 - n^3)} + 1 \right| = \left| \frac{2n^3 - 3n^2 + 2}{(n^2 - 1)(n^3 - 3)} \right|$$

Ora, $|2n^3 - 3n^2 + 2| \leq 2n^3 + 3n^2 + 2 < 7n^3$; quindi,

$$|a_n + 1| < \frac{7n^3}{(n^2 - 1)(n^3 - 3)} = \frac{7}{n^2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{n^3}\right)}.$$

Maggioriamo i denominatori: se $n > 2$, allora $1 - \frac{1}{n^2} > \frac{3}{4}$ e $1 - \frac{3}{n^3} > \frac{5}{8}$. Quindi se $n > 2$, si ha

$$|a_n + 1| < \frac{7}{n^2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{8}{5} < \frac{16}{n^2}.$$

In conclusione, $|a_n + 1| < \varepsilon$ se $n > N := \max\{2, 4/\sqrt{\varepsilon}\}$.

Es 2.3 (i) Se poniamo $y := x - 2$, il problema diventa equivalente a trovare $\delta > 0$ tale che per $|y| < \delta$ si abbia $|f(2 + y) + 3| < 10^{-6}$. Ora,

$$|f(2 + y) + 3| = 2|y|/|1 + y|$$

e, se $|y| \leq 1/2$, si ha $2|y|/|1+y| \leq 4|y|$ (essendo $|1+y| \geq 1-|y| \geq 1/2$). Dunque, se $\delta = 1/(4 \cdot 10^6)$, e se $|y| < \delta$, si ha che $|f(2+y) + 3| \leq 4|y| < 4\delta = 10^{-6}$.

(ii) Poniamo $y := 7 - 4x^2$. Allora, se $|y - 3| < 1$ (cioè $2 < y < 4$), si ha

$$\left| \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right| = \frac{|3-y|}{\sqrt{3y} \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{y})} < \frac{|3-y|}{\sqrt{6} \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})} < |3-y|. \quad (*)$$

D'altra parte, se $|x - 1| \leq 1$,

$$|3-y| := 4|1-x^2| = 4|1-x| \cdot |1+x| \leq 4|x-1|(1+|x|) \leq 8|x-1|. \quad (**)$$

Quindi, mettendo assieme (*) e (**), si ha che $|f(x) - L| < 10^{-6}$ per ogni x tale che $|x - 1| < 1/(8 \cdot 10^6)$.

Es 2.4] (i) Se $x > 1$, si ha

$$\left| \frac{\sqrt{x^2-1}}{2x} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \left| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - 1 \right| = \frac{1}{2x^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + 1} < \frac{1}{2x^2} < 10^{-6}$$

purché $x > M$ con $M := 1/(\sqrt{2} \cdot 10^3)$.

(ii) Se $x > M > 0$, allora $x^2 > M^2$ e $(1+x^2)^{17/19} > (1+M^2)^{17/19} > M^{34/19}$. Quindi, se $M := 10^{57/17}$, si ha che $(1+x^2)^{17/19} > 10^6$.

Es 2.5

$$\frac{n^4 - 7}{n^3 + 1} > M \iff n^3(n - M) > 7 + M$$

e si può prendere $N = M + 7$: infatti se $n \geq M + 7$, allora $n^3(n - M) > n^3 > n \geq M + 7$.

Es 2.6 (i): Se $x \in \overset{\circ}{A}$ esiste un intervallo aperto $I \subseteq A$ che contiene x . Quindi se U è un intorno di x , $I \cap U \subseteq A$ è un intervallo (aperto) che contiene x e quindi contiene (infiniti) punti diversi da x , ossia, $x \in \mathcal{D}A$.

(ii) Se $x \in \mathcal{I}A$ allora esiste un intervallo I tale che $x \in I$ e $I \cap A = \{x\}$ (e quindi I è un intorno di x). Ma allora, $I \cap A \setminus \{x\} = \emptyset$ ossia $x \notin \mathcal{D}^*A$ e quindi $\mathcal{I}A \cap \mathcal{D}^*A = \emptyset$.

(iii) segue da (i) e da (ii).

(iv) Se $x \in A$ ma $x \notin \mathcal{I}A$, allora per ogni intorno U di x , $U \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$ e quindi $x \in \mathcal{D}A$. Ne segue che $A = \mathcal{I}A \cup \mathcal{D}A$ ed essendo tale unione disgiunta (per (ii)), si ha la tesi.

Es 2.7 Se $a < x < b$, allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $a < x - \varepsilon < x < x + \varepsilon < b$ e quindi $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq I$, il che vuol dire che x è interno. D'altra parte, gli estremi non sono punti interni: se $a = -\infty$ o $b = +\infty$, non appartiene ad I e quindi non è interno. Se $a \in \mathbb{R}$, per ogni $\delta > 0$, $a - \delta \notin I$ e quindi a non può essere interno; analogamente per b . Segue dal fatto che $a = \inf(a, b)$ e $b = \sup(a, b)$ (e dalla Proposizione 1.72).

Es 2.8 (i) Se $m \in \mathbb{Z}$, allora $(m - 1/2, m + 1/2) \cap \mathbb{Z} = \{m\}$ e quindi $m \in \mathcal{I}\mathbb{Z}$.

(ii) Da (i) segue che $\overset{\circ}{\mathbb{Z}} = \overset{\circ}{\mathbb{N}} = \emptyset$. In ogni intorno di $x \in \mathbb{R}$ vi sono sia punti razionali che

irrazionali e quindi $\mathbb{Q}^\circ = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^\circ = \emptyset$.

(iii) Essendo $\sup \mathbb{N} = +\infty$, segue che $+\infty \in \mathcal{D}^*\mathbb{N}$; analogamente $+\infty, -\infty \in \mathcal{D}^*\mathbb{Z}$. Per ogni $x \in \mathbb{R}$, in $(x - 1/2, x + 1/2)$ vi è al più un numero intero. Quindi $\mathcal{D}^*\mathbb{N} = \{+\infty\}$, $\mathcal{D}^*\mathbb{Z} = \{-\infty, +\infty\}$.

(iv) segue dal fatto che $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sono illimitati superiormente e inferiormente e dalla densità dei razionali e degli irrazionali.

(v) segue sempre dalla densità dei razionali e degli irrazionali.

Es 2.9 Nel caso $L \in \mathbb{R}$, l'asserto segue dalla disuguaglianza triangolare inversa $||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L|$.

Consideriamo il caso $L = -\infty$ e sia $M > 0$. Per ipotesi segue che esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x) < -M$ per ogni $x \in A \cap U \setminus \{x_0\}$, e per tali x , in particolare, $f(x) < 0$. Quindi, per tali x , $|f(x)| = -f(x) > M$.

Il caso $L = +\infty$ segue analogamente (ed è più semplice).

Es 2.10 Assumiamo $I \neq \emptyset$ (altrimenti la caratterizzazione è banale).

Se $I = (a, b)$ è un intervallo e $x, y \in I$ e $x \leq t \leq y$, per transitività $a < t < b$ e quindi $t \in I$ e dunque vale (2.4); gli altri casi si trattano allo stesso modo.

Assumiamo, ora, che I soddisfi (2.4) e siano $a = \inf I$ e $b = \sup I$. Bisogna considerare i vari casi in cui gli estremi appartengano o meno a I . Consideriamo, ad esempio, il caso in cui $a \notin I$ e $b \in I$. Dobbiamo far vedere che se vale (2.4), allora $I = (a, b]$. Sia dunque $a < t \leq b$. Dalla caratterizzazione di estremo inferiore in $\mathbb{R}^*$ (Osservazione 2.2–(iv)) segue che esiste $x \in I$ tale che $a < x < t$; applicando la (2.4) con $y = b$ segue che $t \in I$ e quindi $I = (a, b]$. Gli altri casi si trattano in modo analogo.

Es 2.11 Nella soluzione di questo esercizio useremo sistematicamente la caratterizzazione degli intervalli nell'Osservazione 2.4–(i). Dimosteremo, poi, (iii) prima di (ii).

(i) Supponiamo per assurdo che sia falso che " $I < J$ o $J < I$ ", ossia, $\exists x_1, x_2 \in I$ e $y_1, y_2 \in J$ tali che $y_1 \leq x_1$ e $x_2 \leq y_2$. Siccome $I \cap J = \emptyset$, questo implica che

$$y_1 < x_1, \quad x_2 < y_2. \quad (*)$$

Ora, ci sono due casi: o $x_1 < y_2$ oppure $y_2 < x_1$.

Nel primo caso, da (*) segue che $y_1 < x_1 < y_2$ e quindi, per la caratterizzazione degli intervalli, segue che $x_1 \in J$ che è impossibile essendo I e J disgiunti.

Nel secondo caso, da (*) segue che $x_2 < y_2 < x_1$ e quindi $y_2 \in I$, nuovamente una contraddizione.

(iii): Assumiamo $I \cap J \neq \emptyset$. Se $x \leq t \leq y$ con $x, y \in A \cap B$, per la caratterizzazione degli intervalli, segue che $t \in A$ e $t \in B$ e quindi $t \in A \cap B$ e dunque $A \cap B$ è un intervallo.

Dimostriamo, ora, che $A \cup B$ è un intervallo, e siano, $x \leq t \leq y$ con $x, y \in A \cup B$. Se $x, y \in A$ o $x, y \in B$, segue che $t \in A$ o $t \in B$ e quindi $t \in A \cup B$. Consideriamo, ora, il caso $x \leq t \leq y$ con $x \in A$ e $y \in B$. Poiché $A \cap B \neq \emptyset$, $\exists x_0 \in A \cap B$. Per la caratterizzazione degli intervalli, tutti i punti tra x e x_0 sono in A e tutti i punti tra x_0 e y sono in B e quindi, necessariamente t appartiene o A o (non esclusivo) a B , ossia, $t \in A \cup B$. Il caso $x \in B$ e $y \in A$ si discute allo stesso modo.

(ii): Dimostriamo “ $\implies$ ”.

Se $I \cap J \neq \emptyset$ la tesi è vera. Se $I \cap J = \emptyset$, per (i) o $I < J$ o $J < I$. I due casi sono analoghi: assumiamo ad esempio che $I < J$ e supponiamo per assurdo che ci siano due elementi separatori diversi $\alpha < \beta$; ma allora, se prendiamo $x \in A$, $y \in B$ e $t \in (\alpha, \beta)$ si ha che $x \leq \alpha < t < \beta \leq y$, ma $t \notin A \cup B$ contraddicendo l'ipotesi fatta.

Dimostriamo “ $\impliedby$ ”.

Se $A \cap J \neq \emptyset$, la tesi segue dal punto (iii) già dimostrato. Se A e B sono contigui significa che $A \leq B$ e $\sup A = \inf B$ (o viceversa, scambiando A e B). In questo caso c'è un unico elemento che separa A e B ed è il valore comune $x_0 = \sup A = \inf B$ e poiché questo appartiene per ipotesi a $I \cup J$ si può ripetere l'ultimo argomento usato per la dimostrazione di (iii) da cui segue che $A \cup B$ è un intervallo.

(iv): $I = \mathbb{R} \iff I^c = \emptyset$ (che è un intervallo). Se I è una semiretta, ad esempio $[a, +\infty)$ o $(a, +\infty)$ (con $a \in \mathbb{R}$) il suo complementare è, rispettivamente, la semiretta $(-\infty, a)$ o $(-\infty, a]$; analogamente per altre semirette. Se I è limitato e non vuoto, ad esempio $I = [a, b]$, con $a \leq b$, $I^c = (-\infty, a) \sqcup (b, +\infty)$; se $I = (a, b]$, allora $I^c = (-\infty, a] \sqcup (b, +\infty)$, e analogamente negli altri casi.

Es 2.12 (i) Se $\bar{s} = +\infty = \sup A$ si ha che A non è limitato e quindi per ogni M esiste $x \in A$ tale che $x > M$ ossia $x \in (M, +\infty)$. Se $\bar{s} = \sup A \in \mathbb{R}$, allora per ogni $\varepsilon > 0$, per la Proposizione 1.72, esiste $x \in A$ tale che $x > \bar{s} - \varepsilon$ e quindi $x \in (\bar{s} - \varepsilon, \bar{s}] \subseteq (\bar{s} - \varepsilon, \bar{s} + \varepsilon)$. Dimostriamo il viceversa. Sia $t < \bar{s}$ e se $\bar{s} = +\infty$ poniamo $V = (t, +\infty)$ e se $\bar{s} \in \mathbb{R}$ poniamo $V = (t, \bar{s} + 1)$. Dalle ipotesi segue che esiste $x \in A \cap V$ e quindi $t < x$. La tesi segue quindi dalla Proposizione 1.72.

(ii) si dimostra in modo analogo con i dovuti cambiamenti.

Es 2.13 Innanzitutto, $b < +\infty$, perché $b = +\infty$ significa che E non è limitato e che $+\infty \in \mathcal{D}^*(E)$. Il fatto che b non è un punto di accumulazione di E significa che $\exists \delta > 0$ tale che $\{x \in E \mid 0 < |x - b| < \delta\} = \emptyset$. Sia $s = b - \delta/2$. Per la caratterizzazione di estremo superiore, deve esistere $x \in E$ tale che $s < x \leq b$; ma allora, $x = b$ e quindi $b \in E$ e $b = \max E$.

Es 2.14 Se JE è finito non c'è nulla da dimostrare. Assumiamo che $JE = \infty$. Poiché $E = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} E_n$ con $E_n := E \cap [n, n+1)$ e l'unione di insiemi numerabili è numerabile, è sufficiente dimostrare che ogni E_n è al più numerabile. Tramite una traslazione ($x \mapsto x - n$), che è una biiezione, basta considerare il caso $n = 0$. Supponiamo quindi che $E \subseteq [0, 1)$ abbia un insieme di punti isolati infinito e dimostriamo che è numerabile.

Per $x \in JE$ sia $r_x = \sup\{r > 0 \mid (x - r, x + r) \cap E = \{x\}\}$; si osservi che tale insieme è non vuoto (per definizione di punto isolato) e limitato (se fosse illimitato si avrebbe $r_x = +\infty$, ma allora $E = \{x\}$ contraddicendo il fatto che $\#E = \infty$). Definiamo $I_x = (x - r_x, x + r_x)$: I_x è il più grande intorno simmetrico di x tale che $I_x \cap E = \{x\}$.

Osserviamo che se $x \neq x'$ sono punti isolati di E con $r_x, r_{x'} \geq \delta$, allora $|x - x'| \geq \delta$ (se fosse $|x - x'| < \delta$, allora $x \in I_{x'}$ contraddicendo il fatto che $I_{x'} \cap E = \{x'\}$). Definiamo, ora, gli insiemi $I_n := \{x \in JE \mid r_x \geq 1/n\}$ e si osservi che $\#I_n \leq n$ (se fosse $\#I_n \geq n+1$ vorrebbe dire che in almeno uno degli n intervalli $[i/n, (i+1)/n)$ che suddividono $[0, 1)$ ci sarebbero almeno due punti isolati x e x' , ma questo è impossibile, essendo $|x - x'| \geq 1/n$ come osservato sopra). La tesi segue osservando che $JE = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

Es 2.15 (2.6) segue dal fatto che $\lim_{x \rightarrow x_0} |F(x)| = 0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = 0$ e dal fatto che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - L) = 0.$$

(2.7) segue dal fatto che, se $x = x_0 + y$, allora $|y| < \varepsilon \iff |x - x_0| < \varepsilon$.

Es 2.16 Sia $M > 0$. Allora esiste un intorno di x_0 tale che $f(x) > M$ per ogni $x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$ e quindi, per tali x , $g(x) \geq f(x) > M$, ossia $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$. Per la seconda affermazione basta considerare $-f$ e $-g$ (o adattare l'argomento precedente).

Es 2.17 Per $x < 0$, $\operatorname{sgn} x = -1 \implies \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1$; analogamente per $x > 0$, $\operatorname{sgn} x = 1 \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1$.

Se $n < x < n + 1$, $[x] = n$. Quindi $\lim_{x \rightarrow n^+} [x] = n$.

Se $n - 1 < x < n$, $[x] = n - 1$. Quindi $\lim_{x \rightarrow n^-} [x] = n - 1$.

$$\lim_{x \rightarrow n^+} \{x\} = \lim_{x \rightarrow n^+} (x - [x]) = n - \lim_{x \rightarrow n^+} [x] = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow n^-} \{x\} = \lim_{x \rightarrow n^-} (x - [x]) = n - \lim_{x \rightarrow n^-} [x] = n - (n - 1) = 1.$$

Es 2.18 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 1$.

Es 2.19 Assumiamo che $\lim_{x \rightarrow x_0} f = L \in \mathbb{R}^*$ e sia V un intorno di L . Allora esiste U intorno di x_0 tale che $f(x) \in V$ per ogni $x \in (U \cap A) \setminus \{x_0\}$. In particolare $f(x) \in V$ per ogni $x \in U \cap A \cap (-\infty, x_0)$ e $f(x) \in V$ per ogni $x \in U \cap A \cap (x_0, +\infty)$ il che significa che $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f = L$.

Assumiamo che $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f = L$ e sia V un intorno di L . Allora esistono due intorni U_1 e U_2 di x_0 tali che $f(x) \in V$ per ogni $x \in U_1 \cap A \cap (-\infty, x_0)$ e $f(x) \in V$ per ogni $x \in U_2 \cap A \cap (x_0, +\infty)$; dunque se $U = U_1 \cap U_2$ si ha che $f(x) \in V$ per ogni $x \in (U \cap A) \setminus \{x_0\}$ il che significa che $\lim_{x \rightarrow x_0} f = L$.

Es 2.20 (i): Dalle ipotesi segue che se $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - L| < \varepsilon/4$ per ogni $x \in W := A \cap U$ con $U := (x_0 - \delta, x_0)$. Quindi, se $x, y \in W$, allora

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - L + L - f(y)| \leq |f(x) - L| + |f(y) - L| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

In particolare, per ogni $x, y \in W$, si ha $f(x) < f(y) + \varepsilon/2$. Prendendo l'estremo superiore su $x \in W$ in tale relazione si ha $\sup_W f \leq f(y) + \varepsilon/2$, o equivalentemente, $\sup_W f - \varepsilon/2 \leq f(y)$, e prendendo l'estremo inferiore in quest'ultima relazione su $y \in W$ si ottiene $\sup_W f - \varepsilon/2 \leq \inf_W f$, cioè, $\sup_W f - \inf_W f \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$, che è la tesi.

Il "caso destro" si tratta in modo del tutto analogo.

(ii) Poiché in ogni intervallo aperto ci sono infiniti numeri razionali e infiniti numeri irrazionali, in ogni intorno sinistro $W = (x_0 - \delta, x_0)$ o intorno destro $W = (x_0, x_0 + \delta)$, con $x_0 \in \mathbb{Q}$, $\sup_W \chi_{\mathbb{Q}} - \inf_W \chi_{\mathbb{Q}} = 1$ e quindi, per il punto precedente non esistono i limiti laterali di $\chi_{\mathbb{Q}}$.

Es 2.21 (i),(ii): Consideriamo, dapprima, il caso $L = +\infty$ e $g > a > 0$ vicino a x_0 , il che significa che esiste un intorno U_1 di x_0 tale che $g(x) > a$ per ogni $x \in (U_1 \cap A) \setminus \{x_0\}$. Sia $M > 0$. Poiché $\lim_{x \rightarrow x_0} f = +\infty$ esiste un intorno U_2 di x_0 tale che $f(x) > M/a$ per ogni $x \in (U_2 \cap A) \setminus \{x_0\}$. Dunque se $U := U_1 \cap U_2$ e $x \in (U \cap A) \setminus \{x_0\}$, si ha che $f(x)g(x) > \frac{M}{a} \cdot a = M$, il che vuol dire che $\lim_{x \rightarrow x_0} fg = +\infty$.

Gli altri casi in (i) e (ii) si riducono a quello appena trattato. Ad esempio, consideriamo il caso $L = +\infty$ e $g < -a$ vicino a x_0 : $g < -a$ è equivalente a $(-g) > a$ e quindi per il caso precedente, dato $M > 0$, esiste un intorno U di x_0 tale che, per ogni $x \in (U \cap A) \setminus \{x_0\}$, $f(x) \cdot (-g(x)) > M$ il che equivale a $f(x) \cdot g(x) < -M$, il che equivale a $\lim_{x \rightarrow x_0} fg = -\infty$.

(iii): Se $\lim f = \pm L$ allora $\lim |f| = +\infty$ e quindi, poiché $|f| > M > 0$ se e solo se $1/|f| < \varepsilon := 1/M$, $\lim 1/|f| = 0$ e l'asserto segue dal Lemma 2.21.

(iv): Sia $M > |b|$ e sia U_1 tale che $g(x) > b$ per ogni $x \in (U_1 \cap A) \setminus \{x_0\}$. Poiché $\lim f = +\infty$, esiste un intorno U_2 di x_0 tale che, per ogni $x \in (U_2 \cap A) \setminus \{x_0\}$, $f(x) > M - b$ e quindi $f + g > M$.

(v) si tratta in modo del tutto analogo.

Es 2.22 Ovviamente $f \sim f$. La simmetria è il punto (i) dell'Osservazione 2.27. Se $f \sim g$ e $g \sim h$, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = 1$, ossia $f \sim h$ (proprietà transitiva).

Es 2.23 Se $f \sim g$ (vicino a x_0) allora $f/g \sim 1$ e quindi la tesi segue dal punto (ii).

Es 2.24 $f \sim g \implies g \sim f$, ossia, $\lim_{x \rightarrow x_0} g/f = 1$. Quindi, per l'algebra dei limiti,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{g}{f} \cdot f \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g}{f} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f = 1 \cdot L = L.$$

Es 2.25 $\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + x^2 \rightarrow 1$ per $x \rightarrow 0$ e quindi $f \sim g$. $f + h \equiv 0$ e quindi $\lim_{x \rightarrow 0} (f + h) = 0$.

Ma, $g(x) + h(x) = -\frac{1}{1+x^2} \rightarrow -1$ per $x \rightarrow 0$.

Es 2.26 Supponiamo $a_n \leq a_{n+1}$ per ogni n . Dimostriamo per induzione su m che $a_n \leq a_{n+m}$ per ogni n, m . Per $m = 1$ è vero per ipotesi e se assumiamo che $a_n \leq a_{n+m}$, poiché $a_{n+m} \leq a_{n+m+1}$ segue che $a_n \leq a_{n+m+1}$.

Es 2.27 Sia $m = \inf E$. Allora, $-m = \sup(-E)$ ed esiste $\{x'_n\} \subseteq (-E)$ crescente tale che $\lim x'_n = -m$, e quindi $x_n := -x'_n \in E$ e $x_n \searrow m$.

Es 2.28 Dalla (2.23) segue che $\frac{n^n}{n!} \geq \frac{e^n}{e \cdot n}$, e $\frac{e^n}{e \cdot n} > \frac{2^n}{4e}$ è equivalente a $\left(\frac{e}{2}\right)^n > \frac{n}{4}$. Ora, essendo $e > 5/2$, dalla disuguaglianza di Bernoulli, segue che

$$\left(\frac{e}{2}\right)^n > \left(\frac{5}{4}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^n > \frac{n}{4}.$$

Es 2.29 Sia U un intorno di L . Allora $\exists N$ tale che $a_{2n}, a_{2n-1} \in V$ per ogni $n \geq N$ e quindi $a_k \in V$ per ogni $k \geq 2N - 1$.

Es 2.30 I termini della successione sono positivi (come si verifica immediatamente per induzione). I primi termini sono $a_1 = p$, $a_2 = (p + 1)/2$, $a_3 = (p^2 + 6p + 1)/(4p)$. Osserviamo che $a_2 < a_1$ (essendo a_2 il punto di mezzo tra $p > 1$ e 1), ed anche che $a_3 < a_2$ (come è facile verificare). Infatti, la successione $\{a_n\}$ è strettamente decrescente, ossia, $a_{n+1} < a_n$ per ogni $n \geq 1$:

$$a_{n+1} < a_n \iff \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{p}{a_n}\right) < a_n \iff p < a_n^2.$$

Dimostriamo quest'ultima relazione per induzione. Per $n = 1$, è ovviamente vera (essendo $a_1 = p > 1$). Assumiamo, ora, che $p < a_n^2$. Con qualche semplice calcolo algebrico, si vede che

$$p < a_{n+1}^2 \iff p < \frac{1}{4}\left(a_n^2 + \frac{p^2}{a_n^2}\right) + \frac{p}{2} \iff 0 < \left(a_n - \frac{p}{a_n}\right)^2$$

e quest'ultima relazione è vera essendo $(a_n - p/a_n)^2 = a_n^{-2}(a_n^2 - p)^2$ che è (strettamente) positivo per l'ipotesi induttiva. Dunque essendo la successione $\{a_n\}$ decrescente e limitata inferiormente (da 0), segue che esiste il $\lim a_n = L \in (0, p)$ ed allora, per l'algebra dei limiti, prendendo il limite per $n \rightarrow +\infty$ nella relazione ricorsiva che definisce a_n , si ottiene

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{p}{L}\right) \iff L^2 = p \iff L = \sqrt{p}.$$

Es 2.31 La successione $\{a_n\}$ è definita come $a_1 = 0$ e, per $n \geq 2$, come $a_n = f(a_{n-1})$ con $f : x \in [0, +\infty) \mapsto f(x) := \sqrt{2+x}$. Tale f è strettamente crescente (essendo strettamente crescenti $2+x$ e $\sqrt{y}$; cfr. Proposizione 1.21) e dunque, $\{a_n\}$ è strettamente crescente ed esiste $\lim a_n = L \in \mathbb{R}^*$. Se il limite è finito, dall'algebra dei limiti segue che $L = \sqrt{2+L}$ ossia $L^2 = 2 + L$, ed essendo $L > 0$, si ha $L = 2$. Per escludere però che il limite sia $+\infty$ dobbiamo far vedere che la successione $\{a_n\}$ è limitata superiormente. Ma questo è facile (per induzione): $a_1 = 0 < 2$, e se $a_n < 2$ allora (essendo $\sqrt{x}$ strettamente crescente) $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} < \sqrt{2+2} = 2$ e quindi $a_n < 2$ per ogni n . Quindi possiamo concludere che $a_n \nearrow 2$.

Es 2.32 Per $n \geq 2$, si ha

$$a_n - \frac{1}{n} = \left(a_{n-1} - \frac{1}{n-1}\right)^2, \quad (n \geq 2).$$

Dunque se poniamo $b_n := a_n - 1/n$, si ha $b_1 = 2$ e $b_n = b_{n-1}^2$ per $n \geq 2$. Iterando quest'ultima relazione si trova facilmente $b_n = 2^{2^{n-1}}$ (che vale per $n \geq 1$) e quindi $a_n = 2^{2^{n-1}} + 1/n$.

Es 2.33 $a_n > 0$ per ogni n e $a_{n+1} < a_n$ (come si verifica immediatamente per induzione). Dunque esiste $\lim a_n = L \geq 0$ e tale limite verifica $L = L/(1+L)$ che ha $L = 0$ come unica soluzione.

Es 2.34 $a_1 = 1$ e, per $n \geq 2$, $a_n = f(a_{n-1})$ con $f(x) := 1/(2+x)$ che è strettamente decrescente per $x > 0$ e quindi $F := f \circ f$ è strettamente crescente. Chiaramente, $a_n > 0$ per ogni n e si ha $a_2 < a_4 < a_3 < a_1$. Da queste relazioni segue che $a_{2n} < a_{2n-1}$ e che $a_{2n} \nearrow \alpha \leq \beta \searrow a_{2n-1}$. Essendo $a_{n+1} = 1/(2+(1/(2+a_{n-1})))$ si ha che α e β verificano la stessa equazione che è $x = 1/(2+(1/(2+x)))$ che si può riscrivere come $x^2 + 2x - 1 = 0$ che ha come unica soluzione positiva $\sqrt{2} - 1$. In conclusione $\lim a_n = \sqrt{2} - 1$.

Es 2.35 Sia $n_k := 1 + 4k$ e $m_k := 2 + 4k$. Allora

$$\left\{\frac{3}{4}n_k\right\} = \left\{\frac{3}{4} + 3k\right\} = \left\{\frac{3}{4}\right\} = \frac{3}{4},$$

mentre

$$\left\{\frac{3}{4}m_k\right\} = \left\{\frac{3}{2} + 3k\right\} = \left\{\frac{3}{2}\right\} = \frac{1}{2},$$

Quindi, per l'Osservazione 2.46–(i), il limite non esiste.

Es 2.36 Poiché $a^{1/n} < a_n^{1/n} < b^{1/n}$, dal teorema del confronto e dalla Proposizione 2.37–(iv) segue che $\lim a_n^{1/n} = 1$.

Es 2.37 Vogliamo dimostrare, per induzione su $n \geq 2$ che

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e n, \quad \forall n \geq 2. \quad (*)$$

Poiché $2 < e < 3$ (cfr. (2.21)), la (*) vale per $n = 2$. Assumiamo che valga la prima disuguaglianza in (*) per $n \geq 2$ e dimostriamola per $n + 1$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot (n+1) \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \frac{1}{e} \\ &\stackrel{(*)}{<} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot (n+1)! \cdot \frac{1}{e} \\ &\stackrel{(2.20)}{<} (n+1)! \end{aligned}$$

Assumiamo, ora, che valga la seconda disuguaglianza in (*) per $n \geq 2$ e dimostriamola per $n + 1$. Ricordando la definizione di E_n in (2.18), si ha

$$\begin{aligned} (n+1)! &= n!(n+1) \stackrel{(*)}{<} \left(\frac{n}{e}\right)^n n e(n+1) \\ &= \frac{e}{E_n} \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} e(n+1) \\ &\stackrel{(2.20)}{<} \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} e(n+1). \end{aligned}$$

Es 2.38 Innanzitutto, $a_n > 0$ per ogni n (come è immediato verificare per induzione). Dunque, $a_n = f(a_{n-1})$ per $n \geq 2$ con $f = 1 + 1/x$: f è una funzione decrescente su $\mathbb{R}_+$ e quindi $F = f \circ f$ è strettamente crescente e

$$F(a_n) := f \circ f(a_n) = f(a_{n+1}) = a_{n+2}, \quad (\forall n \geq 1). \quad (*)$$

Calcoliamo i primi quattro valori di a_n :

$$a_1 = 1 < a_3 = \frac{3}{2} < a_4 = \frac{5}{3} < a_2 = 2. \quad (**)$$

Da queste osservazioni segue facilmente (per induzione) che $\{a_{2n-1}\}$ è una successione strettamente crescente, $\{a_{2n}\}$ una successione strettamente decrescente e che $a_{2n-1} < a_{2n}$ per ogni n .

Dimostriamo che $a_{2n+1} < a_{2n-1}$ per ogni $n \geq 1$. Per $n = 1$, $a_1 < a_3$ segue dalla definizione ricorsiva sdi a_n , e se $a_{2n+1} < a_{2n-1}$, per $n \geq 1$, allora (essendo F strettamente crescente)

$$a_{2n+3} \stackrel{(*)}{=} F(a_{2n+1}) < F(a_{2n-1}) \stackrel{(*)}{=} a_{2n+1}.$$

In modo del tutto analogo, $a_4 < a_2$, e se $a_{2n+2} < a_{2n}$, per $n \geq 1$, allora $a_{2n+4} = F(a_{2n+2}) < F(a_{2n}) = a_{2n-2}$. Infine $a_1 < a_2$, e se $a_{2n-1} < a_{2n}$, per $n \geq 1$, allora $a_{2n+3} = F(a_{2n-1}) < F(a_{2n}) = a_{2n+2}$.

Da questo segue che la successione $\{a_{2n-1}\}$ è una successione monotona strettamente crescente e un qualunque a_{2k} ne è un maggiorante; dunque $\lim a_{2n-1} = \sup a_{2n-1} \leq a_{2k}$ per ogni k . Analogamente, la successione $\{a_{2n}\}$ è una successione monotona strettamente decrescente e un qualunque a_{2k-1} ne è un minorante; dunque $\lim a_{2n} = \inf a_{2n} \geq a_{2k-1}$ per ogni k . Per cui $\lim a_{2n-1} =: \alpha \leq \beta := \lim a_{2n}$. D'altra parte, iterando due volte la definizione ricorsiva di a_n abbiamo che

$$a_{2n+2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_{2n}}}, \quad a_{2n+1} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_{2n-1}}}$$

e prendendo il limite in tali relazioni vediamo che α e β verificano la stessa equazione

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \iff (x-1) = \frac{x}{x+1} \iff x^2 - x - 1 = 0$$

equazione che ha un'unica soluzione positiva, ossia, $x = (\sqrt{5} + 1)/2$. Da questo segue che $\alpha = \beta = (\sqrt{5} + 1)/2$ e, dunque (per l'Esercizio 2.29), che $a_n \rightarrow (\sqrt{5} + 1)/2$.

Es 2.39 (i): Poiché $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}^2(x) = 1$, $x \in \mathbb{R} \mapsto \operatorname{sgn}^2(x)$ ha una discontinuità eliminabile in 0.

(ii): Poiché $\lim_{x \rightarrow n-} [x] = n-1 < n = \lim_{x \rightarrow n+} [x]$, $x \in \mathbb{R} \mapsto [x]$ e $x \in \mathbb{R} \mapsto \{x\}$ hanno una discontinuità di salto in n per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

(iii) Poiché $\lim_{x \rightarrow 0+} 1/x = +\infty$, $f : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto 1/x$ ha una discontinuità essenziale in 0.

(iv) Poiché, per l'Es 2.20-(ii), $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, non esiste il $\lim_{x \rightarrow x_0-} \chi_{\mathbb{Q}}$, $x \in \mathbb{R} \mapsto \chi_{\mathbb{Q}}$ ha una discontinuità essenziale in ogni punto di $\mathbb{R}$.

Es 2.40 Poiché $|f| : (a, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ è continua (essendo composizione di due funzioni continue), dal teorema di permanenza del segno segue che esiste un $a < b < x_0$, tale

che $|f(x)| > 1$ per ogni $b < x < x_0$ e quindi $f(x)$ non può cambiare segno su (b, x_0) (altrimenti per il teorema di esistenza degli zeri esisterebbe un $b < x_1 < x_0$ tale che $f(x_1) = 0$). Dunque o $f(x) > 0$ su (b, x_0) oppure $f(x) < 0$ su (b, x_0) ; nel primo caso $|f(x)| = f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f = \lim_{x \rightarrow x_0} |f| = +\infty;$$

nel secondo caso $f(x) < 0$ e $|f(x)| = -f(x)$ e quindi, per algebra dei limiti,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = - \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = -\infty.$$

Sia f continua su (a, x_0) con $a < x_0 \leq +\infty$. Dimostrare che se $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$, allora o $f \rightarrow +\infty$ oppure $f \rightarrow -\infty$ per $x \rightarrow x_0$.

Es 2.41 Per $n = 0$ il polinomio è una costante e il risultato è ovvio (con qualunque costante di Lipschitz $L > 0$).

Osserviamo che, per ogni $n \geq 1$, da (1.36), segue che, se $|x|, |y| \leq r$, allora

$$|x^n - y^n| \leq |x - y| \left| \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k-1} \right| \leq |x - y| n r^{n-1}. \quad (*)$$

Sia $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, $a_n \neq 0$, un polinomio di grado $n \geq 1$. Sia $R = \max\{r, 1\}$, $M := \max\{|a_k| \mid 1 \leq k \leq n\}$, allora, da (*), segue che per ogni $|x|, |y| \leq r$,

$$|p(x) - p(y)| \leq L|x - y|, \quad \text{con } L := n^2 M R^{n-1}.$$

Es 2.42

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |(f(x) - f(y))g(x) + f(y)(g(x) - g(y))| \\ &\leq \sup_I |g| |f(x) - f(y)| + \sup_I |f| |g(x) - g(y)| \end{aligned}$$

Dunque se

$$f(x) = |x - 1| \quad \text{e} \quad g(y) = 1/(x^2 + 5)^{1/2}$$

si ha $\sup_I |f| \leq 1$ e $\sup_I |g| \leq 1/\sqrt{5}$. Inoltre

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \quad \text{e} \quad |g(x) - g(y)| \leq \sup_I |g'| |x - y| < |x - y|.$$

In definitiva si può prendere $\delta = \varepsilon/2$.

Es 2.43 (i) Si può prendere $\delta = \frac{1}{1000}$. Infatti, $|x - x_0| < \delta$ equivale a

$$\frac{449}{500} < x < 1$$

e quindi

$$\begin{aligned}
 |x^5 - 1| &= 1 - x^5 = (1 - x) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + x^4) \\
 &< 5(1 - x) = 5(1 - x_0 + x_0 - x) \\
 &= 5\left(\frac{1}{1000} + x_0 - x\right) \\
 &< 5\left(\frac{1}{1000} + \delta\right) = \frac{1}{100}.
 \end{aligned}$$

(ii) Il $\lim_{x \rightarrow x_0} x^5 = (999/1000)^5 < 1$ e quindi (per l'unicità del limite) $\lim_{x \rightarrow x_0} x^5 = 1$ è falso e non può seguire da nessuna ipotesi (vera).

Es 2.44 Supponiamo, per assurdo, che f sia uniformemente continua su E e prendiamo $\varepsilon = a/2$. Allora, esisterebbe $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| < a/2$ per ogni $x, y \in E$ con $|x - y| < \delta$. Ma $y_n - x_n \rightarrow 0$, quindi esiste N tale che $0 < y_n - x_n < \delta$ per ogni $n \geq N$, il che contraddice che $|f(x_n) - f(y_n)| \geq a$ per ogni n .

Es 2.45 La funzione $x \in [0, +\infty) \mapsto f(x) := x^n \in [0, +\infty)$ è una funzione continua e strettamente monotona (e quindi invertibile). Dal teorema dei valori intermedi, essendo $f(0) = 0, f \geq 0$ e $\sup_{[0, +\infty)} f = +\infty$, segue che $f([0, \infty)) = [0, +\infty)$. Quindi, la funzione $g(x) = f^{-1}(x)$ verifica $f \circ g(x) = x$, ossia, $g(x)^n = x$, ossia, per ogni $x \in [0, +\infty)$, $y = g(x)$ verifica $y^n = x$; inoltre da (1.36) segue che un tale y è unico (e quindi è, per definizione, la radice ennesima di $\sqrt[n]{x}$ di x).

Si osservi, inoltre, che dal Teorema 2.56, segue che $x \mapsto \sqrt[n]{x} := f^{-1}(x)$ è una funzione continua.

Es 2.46 Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ crescente (nel caso f decrescente, si consideri la funzione $-f$). Sia $\alpha = \inf A$ e $\beta = \sup A$. Allora, esistono $x_n \leq y_n$ punti di A tali che $x_n \searrow \alpha$ e $y_n \nearrow \beta$. Poiché $\cup_n [x_n, y_n] \cap A = A \cap (\alpha, \beta)$ e poiché l'unione di insiemi al più numerabili è al più numerabile, basta dimostrare che

$$D_n := \{x \in A_n := [x_n, y_n] \cap A \mid f \text{ ha un salto in } x\}$$

è al più numerabile. Se $x \in A_n$ è un punto di salto, si deve avere $0 < \sigma(x) := f(x+) - f(x-)$, dove $f(x\pm)$ denota il limite da sinistra/destra di f in x . Dunque $D_n = \{x \in A_n \mid \sigma(x) > 0\}$ e quindi

$$D_n = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \{x \in A_n \mid \sigma(x) \geq 1/j\}. \quad (*)$$

Si noti che $f(A_n) = [f(x_n), f(y_n)] =: I$ con $|I| = y_n - x_n$. Poiché se $\sigma(x) > 0$ si ha che $(f(x-), f(x+)) \cap f(A_n) = \emptyset$, si deve avere che $\#\{x \in A_n \mid \sigma(x) \geq 1/j\} \leq |I|/j$. E quindi, da (*) segue che D_n è al più numerabile.

Es 2.47 Sia f monotona e siano $x_1 < x_2 < x_3$ punti di A e $y_i = f(x_i)$. Allora, se f è crescente, $y_1 \leq y_2 \leq y_3$; se f è decrescente, $y_3 \leq y_2 \leq y_1$. Quindi, se f è monotona, conserva l'ordine ciclico.

Dimostriamo, ora, l'implicazione inversa per contrapposizione, ossia, assumiamo che f non sia monotona e dimostriamo che f non conserva l'ordine ciclico, ossia, che esistono

tre punti ordinati tali che l'immagine del punto intermedio non appartiene all'intervallo con estremi l'immagine degli altri due punti.

“ f non monotona” significa che f non è decrescente, nè crescente. Quindi esistono due coppie di punti $x_1 < x_2$ e $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$ tali che $y_1 < y_2$ e $\bar{y}_1 > \bar{y}_2$, dove $y_i = f(x_i)$ e $\bar{y}_i = f(\bar{x}_i)$. Ci sono due casi: (a) $\bar{y}_1 \geq y_2$, (b) $\bar{y}_1 < y_2$.

Nel caso (a), $x_1 \neq \bar{x}_1$ (essendo $y_1 < y_2 \leq \bar{y}_1$) e ci sono due possibilità: o $x_1 < \bar{x}_1 < \bar{x}_2$ nel qual caso $\bar{y}_1 > \max\{\bar{y}_2, y_1\}$, oppure, $\bar{x}_1 < x_1 < x_2$, nel qual caso, $y_1 < \min\{y_2, \bar{y}_1\}$. In entrambi i casi la tesi è vera.

Nel caso (b), $x_2 \neq \bar{x}_2$ (essendo $y_2 > \bar{y}_1 > \bar{y}_2$) e ci sono due possibilità: o $x_1 < x_2 < \bar{x}_2$, nel qual caso $y_2 > \max\{y_1, \bar{y}_2\}$, oppure $\bar{x}_1 < \bar{x}_2 < x_2$, nel qual caso $\bar{y}_2 < \min\{\bar{y}_1, y_2\}$. Di nuovo, in entrambi i casi la tesi è vera.

Es 2.48 Supponiamo, per assurdo, che f non sia monotona. Allora esistono tre punti in I , $x_1 < x_2 < x_3$ tali che $f(x_2)$ non è compreso tra $f(x_1)$ e $f(x_3)$: più precisamente, se poniamo

$$y_i := f(x_i), \quad \bar{y}_1 := \min\{y_1, y_3\}, \quad \bar{y}_3 := \max\{y_1, y_3\},$$

allora $y_2 \notin [\bar{y}_1, \bar{y}_3]$, cioè vale una delle seguenti alternative

$$(i) \quad y_2 < \bar{y}_1, \quad (ii) \quad \bar{y}_3 < y_2.$$

Nel caso (i), scegliamo $\bar{y} \in (y_2, \bar{y}_1)$. Allora (dalla definizione di $\bar{y}_1$) si ha che $y_2 < \bar{y} < y_1$ e $y_2 < \bar{y} < y_3$. Quindi per il teorema del valor medio (Teorema 2.53–(ii) applicato prima all'intervallo $[x_1, x_2]$ e poi all'intervallo $[x_2, x_3]$) e dall'iniettività di f segue che esistono $\bar{x}_1 \in (x_1, x_2)$ e $\bar{x}_2 \in (x_2, x_3)$ tali che $f(\bar{x}_1) = \bar{y} = f(\bar{x}_2)$ ma questo contraddice l'iniettività di f essendo $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$.

Nel caso (ii), scegliamo $\bar{y} \in (\bar{y}_3, y_2)$. Allora (dalla definizione di $\bar{y}_3$) si ha che $y_1 < \bar{y} < y_2$ e $y_3 < \bar{y} < y_2$. Come sopra, per il teorema del valor medio e dall'iniettività di f segue che esistono $\bar{x}_1 \in (x_1, x_2)$ e $\bar{x}_2 \in (x_2, x_3)$ tali che $f(\bar{x}_1) = \bar{y} = f(\bar{x}_2)$ ma questo contraddice l'iniettività di f essendo $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$.

Infine, (essendo f iniettiva) f è *strettamente* monotona.

Es 2.49

$$(l) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tanh x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} \cdot \frac{1}{\cosh x} \stackrel{(h)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cosh x} = 1.$$

$$(m) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arctanh} x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tanh y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{(\tanh y)/y} \stackrel{(m)}{=} 1$$

(dove, nella prima uguaglianza, abbiamo fatto il cambio di variabile $x = \tanh y$).

Es 2.50 $|x|^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{x} \log \frac{1}{|x|}}$. Facendo il cambio di variabili $y = 1/x$, si ha che $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^{-y \log y} = 0$. Facendo il cambio di variabili $y = -1/x$, si ha che $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^{y \log y} = +\infty$. Quindi f ha una discontinuità essenziale in $x = 0$.

Es 2.51 Se $x > 1$ il limite è $+\infty$: infatti,

$$\frac{2^{n^x}}{n!} \geq \frac{2^{n^x}}{n^n} = \exp(n^x \log 2 - n \log n) \rightarrow +\infty.$$

Se $x \leq 1$ il limite è 0: infatti,

$$0 < \frac{2^{n^x}}{n!} \leq \frac{2^n}{n!} \leq \frac{2^n}{\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \left(\frac{2e}{n}\right)^n \rightarrow 0.$$

Es 2.52 Prendendo i logaritmi nelle disuguaglianze (2.20) segue che

$$n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1) \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

da cui segue immediatamente (2.41).

Es 2.53 Adattando (nel modo ovvio) la dimostrazione della Proposizione 2.50, segue immediatamente la continuità di $x \in [0, +\infty) \mapsto x^\alpha$ per $\alpha > 0$.

Es 2.54 Essendo $0 < x, (1-x), \alpha < 1$, si ha: $(1-x)^\alpha > 1-x > 1-x^\alpha$.

Es 2.55 (i): Poiché $a^{-n} \searrow 0$, esiste un $m \in \mathbb{N}$ tale $a^{-m} < x$ e quindi $t = -m \in E_x \neq \emptyset$. Poiché $a^n \nearrow +\infty$, esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $a^m > x$ e quindi se $t \in E_x$, $a^t < x < a^m$ e, poiché $y \rightarrow a^y$ è strettamente crescente, deve essere $t < m$, ossia E_x è limitato superiormente.

(ii): Basta dimostrare che $a^{\lambda_a(x)} = x$ (essendo $x = a^{\log_a(x)}$). Sia $y := \lambda_a(x)$. Supponiamo (per assurdo) che $a^y < x$. Poiché $a^{y+\frac{1}{n}} = a^y a^{\frac{1}{n}} \searrow a^y$, segue (dalla definizione di limite) che esiste un m tale che $a^{y+\frac{1}{m}} < x$; ma allora $y + \frac{1}{m} \in E_x$, il che contraddice il fatto che y è un maggiorante. Supponiamo (per assurdo) che $a^y > x$. Poiché $a^{y-\frac{1}{n}} \nearrow a^y$, segue che esiste un m tale che $x < a^{y-\frac{1}{m}} < a^y$, il che implica che $y - \frac{1}{m}$ è un maggiorante di E_x strettamente più piccolo di y , contraddicendo il fatto che y è il più piccolo dei maggioranti. Dunque deve essere $a^y = x$.

Es 2.56 (1)÷(iv) sono verifiche immediate; ad esempio:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2 - (e^{2x} + e^{-2x} - 2)) = 1.$$

(v): $\sinh x$ è somma di due funzioni strettamente crescenti, e^x e $(-e^{-x})$, e quindi è strettamente crescente.

Se $x \geq 0$ e $y > 0$, allora $\cosh(x+y) = (\cosh x)(\cosh y + \sinh y \tanh x) \geq \cosh x \cosh y > \cosh x$.

(vi) Segue immediatamente dalle proprietà dell'esponenziale. Ad esempio,

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \coth x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} = \lim_{y \rightarrow 1-} \frac{1+t}{1-y} = +\infty.$$

(vii): $\cosh x = \frac{e^x}{2}(1 + e^{-2x})$ e quindi $\cosh x \sim \frac{e^x}{2}$ vicino a $+\infty$.

Es 2.57 $x = \sinh y \iff z^2 - 2xz - 1 = 0$ con $z = e^y > 0 \implies y = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

$1 \leq x = \cosh y \iff z^2 - 2xz + 1 = 0$ con $y \geq 0$ e $z = e^y \geq 1 \implies y = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

Es 2.58 Dalla Proposizione 2.73 segue che, dato $x \geq 0$, l'unica soluzione di $x = \cosh y$ con $y \leq 0$ è data da $-\log(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})^{-1}$ e la tesi segue osservando che $(x + \sqrt{x^2 - 1})^{-1} = x - \sqrt{x^2 - 1}$.

Es 2.59 Dalla definizione di $\tanh y$ e dalla Proposizione 2.72 segue che $|\tanh y| < 1$ per ogni $y \in \mathbb{R}$ e che $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \tanh y = \pm 1$. Dunque, essendo $y \in \mathbb{R} \mapsto \tanh y$ continua, dal Teorema dei valori intermedi segue che $\text{im}(\tanh) = (-1, 1)$. Ora, se $|x| < 1$, si ha che $x = \tanh y$ se e solo se $e^{2y} = (1+x)/(1-x)$ ossia se e solo se $y = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$ e dunque la funzione inversa di $y \in \mathbb{R} \mapsto \tanh y$ è data da $x \in (-1, 1) \mapsto \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} := \text{Arctanh } x$. Notiamo anche che $x \in (-1, 1) \mapsto (1+x)/(1-x)$ è una funzione strettamente crescente e quindi anche $y = \text{Arctanh } x$ e $x = \tanh y$ lo sono.

Capitolo 3

Es 3.1 (i): $|\log(1+x)| = \log(1+x)$ se $x > 0$, e $|\log(1+x)| = -\log(1+x)$ se $x < 0$. Quindi

$$D_- |\log(1+x)| \Big|_{x=0} = 1, \quad D_+ |\log(1+x)| \Big|_{x=0} = -1,$$

ossia, $x = 0$ è un punto angoloso per $|\log(1+x)|$.

(ii): $|x^{1/3}| = x^{1/3}$ se $x > 0$, e $|x^{1/3}| = -x^{1/3}$ se $x < 0$. Quindi

$$D_- |x^{1/3}| \Big|_{x=0} = +\infty, \quad D_+ |x^{1/3}| \Big|_{x=0} = -\infty,$$

ossia, $x = 0$ è una cuspidale per $|x^{1/3}|$.

(iii): Da (ii) segue che,

$$-D_- |x^{1/3}| \Big|_{x=0} = -\infty, \quad -D_+ |x^{1/3}| \Big|_{x=0} = +\infty,$$

quindi, anche per $-|x^{1/3}|$, $x = 0$ è una cuspidale.

Es 3.2 Se f è pari, $R_f(-h, 0) = (f(-h) - f(0))/(-h) = (f(h) - f(0))/(-h) = -R_f(h, 0)$ e quindi $D_+ f(0) = -D_- f(0)$ ma essendo f derivabile $D_- f(0) = D_+ f(0)$, da cui segue che $Df(0) = 0$.

Es 3.3 I limiti sono per $x \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sinh 2x - 2 \sinh x)'}{(x^3)'} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cosh 2x - 2 \cosh x}{3x^2}, \text{ (forma indeterminata)} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 \cosh 2x - 2 \cosh x)'}{(3x^2)'} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sinh 2x - 2 \cosh x}{6x}, \text{ (forma indeterminata)} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4 \sinh 2x - 2 \cosh x)'}{(6x)'} &= \frac{8}{6} - \frac{2}{6} = 1; \end{aligned}$$

Le prime due applicazioni della regola di Bernoulli-Hôpital riproducono una forma indeterminata $\frac{0}{0}$. La giustificazione corretta, va dunque “letta al contrario”: l’ultima uguaglianza è conseguenza della regola di Bernoulli-Hôpital; ma allora anche la precedente ne è conseguenza e così anche la prima.

Es 3.4 I cambiamenti da fare nella dimostrazione del Lemma 3.26 sono i seguenti.

$$\begin{aligned} D_- A(x)- &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{A(x-h) - A(x)}{-h} \\ &= - \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{A(x-h) - A(x)}{h}. \end{aligned}$$

Quindi, al posto della (3.43), si ha

$$A(x-h) - A(x) = -(A(x-h) - A(x)) = -\ell(S_{x-h,x}^1), \quad (h > 0). \quad (*)$$

Dopo la (3.43), si deve porre $x_0 = x-h$ e $x_1 = x$; $\alpha(h)$ e $\beta(h)$, con h sempre positivo, sono definiti nello stesso modo con l'inf e il sup calcolati su $(x-h, x)$ anziché su $(x, x+h)$. A questo punto la dimostrazione si conclude nello stesso modo con il segno meno dovuto alla formula (*).

Es 3.5 Nelle seguenti formule $n \in \mathbb{Z}$.

Il seno è strettamente crescente sugli intervalli $I_s^n := [-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n]$ e strettamente decrescente sugli intervalli $J_s^n := [\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n]$.

Il coseno è strettamente decrescente sugli intervalli $I_c^n := [2\pi n, \pi + 2\pi n]$ e strettamente crescente sugli intervalli $J_c^n := [\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n]$.

La tangente è sempre strettamente crescente (dove è definita), ossia è crescente sugli intervalli $I_{tg}^n := [-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n]$.

La cotangente è sempre strettamente decrescente (dove è definita), ossia è decrescente sugli intervalli $I_{ctg}^n := [\pi n, \pi + \pi n]$.

Su *ognuno* di tali intervalli le funzioni trigonometriche sono invertibili con funzioni inverse diverse ma che conservano le stesse monotonie. Definiamo i *rami principali* delle funzioni trigonometriche le funzioni inverse ottenute invertendo le funzioni sugli intervalli con indice $n = 0$ e le denotiamo con la lettera maiuscola. Quindi i rami principali dell'arcoseno, l'arccoseno, l'arcotangente e l'arcocotangente sono definiti come segue:

$y \in [-1, 1] \mapsto \text{Arcsen } y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ è la funzione inversa di $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \mapsto \sin x$;

$y \in [-1, 1] \mapsto \text{Arccos } y \in [0, \pi]$ è la funzione inversa di $x \in [0, \pi] \mapsto \cos x$;

$y \in (-\infty, +\infty) \mapsto \text{Arctan } y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ è la funzione inversa di $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \mapsto \tan x$;

$y \in (-\infty, +\infty) \mapsto \text{Arctan } y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ è la funzione inversa di $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \mapsto \tan x$;

$y \in (-\infty, +\infty) \mapsto \text{Arccotan } y \in (0, \pi)$ è la funzione inversa di $x \in (0, \pi) \mapsto \cotan x$.

Tutti gli altri rami sono definiti tramite opportune traslazioni. Se poniamo, per ogni $n \in \mathbb{Z}$,

$$\text{arcsen}_n(y) := 2\pi n + \text{Arcsen } y,$$

$$\text{arccos}_n(y) := 2\pi n + \text{Arccos } y,$$

$$\text{arctan}_n(y) := \pi n + \text{Arctan } y,$$

$$\text{arccotan}_n(y) := \pi n + \text{Arccotan } y,$$

allora, $\text{arcsen}_n : y \in [-1, 1] \mapsto \text{arcsen}_n(y) \in I_s^n$ è l'inversa di $x \in I_s^n \mapsto \sin x$, etc.

Es 3.6 Fissato $(x, y) \in S^1$ sappiamo che $\exists! t \in [0, 2\pi)$ tale che $\cos t = x$ e $\sin t = y$. Fissiamo $a > 0$, mostriamo che $\exists! s \in [a, a + 2\pi)$ tale che $\cos s = x$ e $\sin s = y$. Poniamo,

$$k := \left\lceil \frac{a-t}{2\pi} \right\rceil, \quad s := t + 2\pi k.$$

Allora, essendo coseno e seno periodiche di periodo 2π , si ha che $\cos s = x$ e $\sin s = y$; inoltre per definizione di parte intera si vede subito che $s \in [a, a + 2\pi)$. L'unicità di s in

$[a, a + 2\pi]$ segue dall'unicità di $t \in [0, 2\pi]$. Lo stesso vale, naturalmente, per $t \in (0, 2\pi]$ e $s \in (a, a + 2\pi]$.

Es 3.7 (i): Sia $u(t) := t - \sin t$, applicando il teorema del valor medio di Lagrange a $u(t)$ per $t \in [0, \pi/2]$ segue che esiste $s \in (0, \pi/2)$ tale che

$$t - \sin t = u(t) - u(0) = u'(s) \cdot t = (1 - \cos s) \cdot t > 0, \quad \text{per } 0 < s < t < \pi/2,$$

e quindi $\sin t < t$ per ogni $t \in (0, \pi/2)$.

Analogamente, se $v(t) := \tan t - t$, applicando il teorema del valor medio di Lagrange a $v(t)$ per $t \in (0, \pi/2)$ segue che esiste $s \in (0, \pi/2)$ tale che

$$\tan t - t = v(t) - v(0) = v'(s) \cdot t = \frac{1}{\cos^2 s} \cdot t > 0, \quad \text{per } 0 < s < t < \pi/2,$$

e quindi $t < \tan t$ per ogni $t \in (0, \pi/2)$.

(ii) Per $t \geq \pi/2$, $t \geq \pi/2 > 1 \geq \sin t$ e quindi, dal punto (i), segue che $\sin t < t$ per ogni $t > 0$. Per $t < 0$, il risultato deriva da quanto appena dimostrato:

$$|\sin t| = \sin(-t) < -t = |t|.$$

Es 3.8 I limiti seguono con i cambi di variabile $y = \operatorname{Arcsen} x$ e $y = \operatorname{Arctan} x$ (e dai limiti notevoli noti).

Es 3.9 (i) In $(0, 1]$ f è continua (essendo composizione e prodotto di funzioni continue); inoltre, $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0$ e quindi $f \in C([0, 1])$.

(ii) I punti critici di f sono dati da $x_k = 1/y_k$ con $k \in \mathbb{N}$, dove $y_k \in (k\pi, (k + \frac{1}{2})\pi)$ sono le infinite soluzioni positive dell'equazione $\tan y = y$.

(iii) $\max f = \sin 1$; $\min f = x_1 \sin(1/x_1)$.

Es 3.10 Se I è un intervallo non degenere contiene un intervallo limitato (a, b) che possiamo mandare sull'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$ tramite la mappa

$$\phi_0(x) := a + \pi \frac{x - a}{b - a}.$$

Tale intervallo è in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{R}$ tramite la mappa $\phi_1(x) = \tan x$. Quindi, se poniamo $\psi(x) = \phi_1 \circ \phi_0(x)$ su (a, b) e $\psi(x) = x$ per $x \in I \setminus (a, b)$, otteniamo $I \stackrel{\psi}{\cong} \mathbb{R}$.

Es 3.11 Le derivate delle funzioni a sinistra e destra di (3.71) coincidono e quindi, per il Corollario 3.15, la loro differenza è una costante c , ma poiché tali funzioni hanno lo stesso limite per $x \rightarrow +\infty$ segue che $c = 0$ e quindi (3.71) è vera. Lo stesso ragionamento porta alla (3.72).

Es 3.12 Se $h \neq 0$,

$$\frac{f(h)}{h} = h \sin \frac{1}{h} \rightarrow 0,$$

se $h \rightarrow 0$, quindi $f'(0) = 0$, ma, se $x \neq 0$, $f'(x) = -\cos(1/x) + 2x \sin(1/x)$ che non ha limite per $x \rightarrow 0$.

Es 3.13 $g'(x) = 1 - 2 \cos \frac{1}{x} + 4x \sin \frac{1}{x}$ e se $x_n = 1/(2\pi n)$ e $y_n = 1/(\pi + 2\pi n)$, si ha che

$$g'(x_n) = -1, \quad g'(y_n) = 3, \quad x_n, y_n \rightarrow 0.$$

Questo vuol dire che vicino a x_n , g è strettamente decrescente, mentre, vicino a y_n , g è strettamente crescente. Quindi, non esiste alcun intorno di 0 su cui g è monotona.

Es 3.14 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f/g = 0$, mentre il $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'/g' = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$ che non esiste.

Es 3.15 $f(x) \geq x - 1 \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow +\infty$; $\exp(\sin x) \geq e^{-1}$ e quindi $g \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow +\infty$.

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = 2e^{-\sin x} \frac{\cos x}{x + (\cos x) \cdot (2 + \sin x)} \rightarrow 0, \quad \text{per } x \rightarrow +\infty;$$

ma

$$\frac{f(x)}{g(x)} = e^{-\sin x},$$

che non ha limite (essendo una funzione periodica non costante).

L'ipotesi per l'applicazione della regola di Bernoulli-Hôpital non soddisfatta in questo esempio è: " $g' \neq 0$ vicino a $x_0 = +\infty$ ", essendo

$$g'(x) = e^{\sin(x)} \cos(x) \cdot (x + (\sin(x) + 2) \cos(x)),$$

che si annulla nei punti $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \rightarrow +\infty$ per $k \rightarrow +\infty$.

Es 3.16 (i) Consideriamo, ad esempio, il caso $[x_0, b)$: ragionando come nella dimostrazione della Proposizione 3.41-(i) si ha che f è strettamente crescente in un intorno di x_0 e quindi x_0 è un minimo locale stretto.

(ii) $f(x) = \sqrt{x}$ ha un minimo stretto su $[1, 2]$ in 1 ma $f''(1) = -1$.

Es 3.17 La dimostrazione del Teorema 3.38 vale parola per parola sostituendo *tutte le disuguaglianze* con disuguaglianze strette.

Es 3.18 Da (3.75) segue che, se $x \neq y$ sono punti di I , allora

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq f'(y), \quad \text{se } x > y, \quad (*)$$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq f'(y), \quad \text{se } x < y, \quad (**)$$

Siano ora $x_2 > x_1$ punti di I , allora

$$f'(x_1) \stackrel{(*)}{\leq} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \stackrel{(**)}{\leq} f'(x_2),$$

e quindi $f'(x_2) \geq f'(x_1)$, ossia, f' è crescente.

Es 3.19 NB: Dimostrare anche che: $(3.76) \iff R_f(x_1, x_2) \leq R_f(x, x_2)$, per ogni $x_1 < x < x_2$ punti di I .

(i) Poniamo $y := f(x)$, $y_1 := f(x_1)$ e $y_2 := f(x_2)$ e $R(\cdot, \cdot) := R_f(\cdot, \cdot)$. La (3.76) è equivalente a (si noti che $x - x_1 > 0$ e $x_2 - x_1 > 0$)

$$\begin{aligned} \frac{y - y_1}{x - x_1} \leq \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} &\iff (y - y_1)(x_2 - x_1) \leq (y_2 - y_1)(x - x_1) \\ &\iff yx_2 + y_2x_1 + y_1x \leq y_2x + yx_1 + y_1x_2 \end{aligned}$$

(ii) $R(x_1, x) \leq R(x_2, x)$ è equivalente a (si noti che $x - x_1 > 0$ e $x_2 - x > 0$)

$$\begin{aligned} \frac{y_1 - y}{x_1 - x} \leq \frac{y_2 - y}{x_2 - x} &\iff \frac{y - y_1}{x - x_1} \leq \frac{y_2 - y}{x_2 - x} \\ &\iff (y - y_1)(x_2 - x) \leq (y_2 - y)(x - x_1) \\ &\iff yx_2 + y_2x_1 + y_1x \leq y_2x + yx_1 + y_1x_2. \end{aligned}$$

(iii) Infine, $R(x_1, x_2) \leq R(x, x_2)$ è equivalente a (si noti che $x_2 - x_1 > 0$ e $x_2 - x > 0$)

$$\begin{aligned} \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \leq \frac{y - y_2}{x - x_2} &\iff \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \leq \frac{y_2 - y}{x_2 - x} \\ &\iff (y_2 - y_1)(x_2 - x) \leq (y_2 - y)(x_2 - x_1) \\ &\iff yx_2 + y_2x_1 + y_1x \leq y_2x + yx_1 + y_1x_2. \end{aligned}$$

Le equivalenze sono provate.

Es 3.20 (i) Dall'Es 3.19 (e il suo svolgimento) segue che, per ogni $x = x_0$ interno all'intervallo I , la funzione $x \in I \setminus \{x_0\} \mapsto F(x) := R(x, x_0)$ è una funzione crescente. Dunque, esistono i limiti laterali per $x \rightarrow x_0+$ e $x \rightarrow x_0-$ di F che non sono altro che le derivate sinistre e destre di f in x_0 e

$$D_-f(x_0) \leq D_+f(x_0), \quad \forall x_0 \in \overset{\circ}{I}. \quad (*)$$

(ii) $\forall x_0 \in \overset{\circ}{I}$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) - f(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0-} R(x, x_0)(x - x_0) = D_-f(x_0) \cdot 0 \\ &= 0 \\ &= D_+f(x_0) \cdot 0 = \lim_{x \rightarrow x_0+} R(x, x_0)(x - x_0) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) - f(x_0), \end{aligned}$$

ossia, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ e quindi f è continua su $\overset{\circ}{I}$.

(iii) Dimostriamo prima che se f è derivabile in I (e vale la (3.76)), allora f è convessa, ossia, f' è crescente su I . Siano infatti $x_0 < x_1 < x_2 < x_3$ punti in I , dall'Es 3.19 (e il suo svolgimento) segue che

$$R(x_0, x_1) \leq R(x_2, x_1) = R(x_1, x_2) \leq R(x_3, x_2) = R(x_2, x_3);$$

prendendo il limite per $x_0 \rightarrow x_1$ e $x_3 \rightarrow x_2$, si ottiene

$$f'(x_1) \leq R(x_2, x_1) \leq f'(x_2), \quad \forall x_1 < x_2, (x_i \in I).$$

Dunque una funzione derivabile è convessa se e solo se soddisfa (3.76). Questo vuol dire che la (3.76) è una generalizzazione della convessità per funzioni arbitrarie (che, d'altra parte, come visto, a posteriori sono continue nell'interno di I) e dunque la (3.76) è la definizione di convessità per funzioni arbitrarie su intervalli.

La (3.75) segue, infine, dal Teorema 3.38.

Es 3.21 (i) Dimostriamo prima che per ogni $x_0 \in (a, c)$ esiste m tale che

$$f(x) \geq f(x_0) + m(x - x_0), \quad \forall x \in (a, c). \quad (*)$$

Siano $r_{\pm}$ le rette passanti per $(b, f(b))$ con coefficienti angolari $D_{\pm}f(b)$:

$$r_{\pm}(x) = f(b) + m_{\pm}(x - b), \quad m_{\pm} := D_{\pm}f(b).$$

Poiché f è convessa in (a, b) e in (b, c) e continua in b da (3.75) (con $x_0 \rightarrow b^{\mp}$) segue che

$$f(x) \geq r_{-}(x), \quad \forall a < x \leq b, \quad f(x) \geq r_{+}(x) \quad \forall b \leq x < c. \quad (**)$$

Osserviamo poi che, essendo $m_{+} \geq m_{-}$,

$$r_{-}(x) \geq r_{+}(x), \quad \forall x \leq b; \quad r_{-}(x) \leq r_{+}(x), \quad \forall x \geq b. \quad (\star)$$

Sia ora $x_0 \leq b$ e dimostriamo (*) con $m = D_{-}f(x_0)$ (che coincide con $f'(x_0)$ se $x_0 < b$). Sia

$$r_0(x) := f(x_0) + m(x - x_0).$$

Poiché f è convessa in (a, b) e continua in b , da (3.76), segue che

$$f(x) \geq r_0(x), \quad \forall c < x \leq b. \quad (\dagger)$$

In particolare, $r_0(b) \leq f(b)$ e $m \leq m_{-}$ (poiché f' è crescente in (a, b) ed esiste $D_{-}f(b)$); dunque:

$$r_0(x) \leq r_{-}(x), \quad \forall x \geq b.$$

Quindi, se $x \geq x_0$,

$$f(x) \stackrel{(\dagger)}{\geq} r_{+}(x) \stackrel{(\star)}{\geq} r_{-}(x) \geq r_0(x).$$

Dunque, (*) è soddisfatta per ogni $x \in (a, b)$. Il ragionamento nel caso $x_0 \geq b$ è del tutto analogo.

(ii) Dimostriamo, ora, che (*) implica che f è convessa su (a, c) . Siano $x_1 < x_0 < x_2$ punti in (a, c) . Sostituendo x con x_1 in (*) si ha che

$$f(x_1) - f(x_0) \geq m(x_1 - x_0) \iff R(x_1, x_0) \leq m.$$

e sostituendo x con x_2 , si ha

$$f(x_2) - f(x_0) \geq m(x_2 - x_0) \iff R(x_2, x_0) \geq m.$$

Mettendo assieme le due relazioni si ha che $R(x_1, x_0) \leq R(x_2, x_0)$ che, per l'Es 3.20 (e il suo svolgimento), implica che f è convessa su (a, c)

Es 3.22 Essendo f' strettamente crescente, $f'(x) = 0$ ha al più una soluzione. Se $f(x_1) = f(x_2) = c$ con $x_1 < x_2$, dal teorema di Rolle segue che f ha un punto stazionario x_0 interno a (x_1, x_2) , ossia, $f'(x_0) = 0$, $x_1 < x_0 < x_2$. Ma per quanto detto prima tale x_0 , in tal caso, è unico e quindi non può esistere un altro punto $x_3 \neq x_1, x_2$ tale che $f(x_3) = c$ (altrimenti, ordinando le tre soluzioni di $f(x) = c$, $x_1 < x_2 < x_3$ si avrebbero due punti stazionari: uno in (x_1, x_2) e uno in (x_2, x_3)).

Es 3.23 (i)

$$\begin{aligned}\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6), \\ \sqrt{1+x^2} &= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + O(x^6), \\ \sin x^2 &= x^2 + O(x^6), \\ (\arctan x)^2 &= x^2 - \frac{2}{3}x^4 + O(x^6),\end{aligned}$$

Quindi il limite cercato è $1/4$.

(ii)

$$\begin{aligned}g(x) &= 1 - (1 - \frac{x^4}{2} + O(x^8)) = \frac{x^4}{2} + O(x^8); \\ \frac{x^2}{1-x} &= x^2(1+x+x^2+O(x^3)) = x^2 + x^3 + x^4 + O(x^5); \\ (e^x - 1)^2 &= e^{2x} + 1 - 2e^x = x^2 + x^3 + \frac{7}{12}x^4 + O(x^5).\end{aligned}$$

Quindi $f(x) = \frac{5}{12}x^4 + O(x^5)$ e $\lim_{x \rightarrow 0} f/g = \frac{5}{6}$.

(iii) Per $0 < x < 1$ si ha:

$$\begin{aligned}x \cos \sqrt{x} &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{24} + O(x^4), \\ \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^4), \\ x \cosh^2 x - x &= x(1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4))^2 - x = x^3 + O(x^4),\end{aligned}$$

da cui segue che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cos \sqrt{x} - \log(1+x)}{x \cosh^2 x - x} = -\frac{7}{24}$.

(iv) $\log(\cos x) = \log(1-f)$ con $f = 1 - \cos x$, da cui,

$$\log(\cos x) = -f - \frac{f^2}{2} + O(f^3) = -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{12}x^4 + O(x^6);$$

$$1 - e^{-x^2/2} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + O(x^6);$$

$\tan(2x^4 + 3x^5) \sim 2x^4$ per $x \rightarrow 0$. In conclusione il limite cercato è $-5/48$.

Es 3.24

$$\cos x^4 = 1 - \frac{x^8}{2} + O(x^{16}), \quad (1+y)^{3/2} = 1 + \frac{3}{2}y + O(y^2),$$

da cui, ponendo $y = -\frac{x^8}{2} + O(x^{16})$ si ottiene

$$(\cos x^4)^{3/2} = 1 - \frac{3}{4}x^8 + O(x^{16})$$

e quindi

$$T_{f,8}(x; 0) = 1 - \frac{3}{4}x^8$$

$$\text{e } f^{(8)}(0) = -\frac{3}{4}8! = -30240.$$

Es 3.25 Dal binomio di Newton segue che $(1+x^2)^{10} = x^{20} + P(x)$ con $P(x)$ polinomio di grado 18 per cui

$$D^{20}(1+x^2)^{10} = 20!$$

e $\cosh x^5 = 1 + \frac{x^{10}}{2} + \frac{x^{20}}{24} + O(x^{30})$, per cui $D^{20}(\cosh x^5)(0) = \frac{20!}{24}$. In conclusione, $f^{(20)}(0) = \frac{25}{24} \cdot 20!$

Es 3.26 (i) : Per $n = 1$, dalla formula di Leibniz, segue che $(fg)' = f'g + fg'$; per $n = 2$, si ha

$$(fg)^{(2)} = (f'g + fg')' = f''g + f'g' + f'g' + fg'' = f'' + 2f'g' + g''.$$

e la tesi segue verificando, per induzione, che

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}, \quad \forall n \geq 1. \quad (*)$$

(ii) : Poiché $0 = \left(\frac{1}{f} \cdot f\right)^{(n)}$ per ogni $n \geq 1$ da (i) segue, per induzione, che

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{(n)} = -\frac{1}{f} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{f}\right)^{(k)} f^{(n-k)}, \quad \forall n \geq 1. \quad (**)$$

(iii) **NB:** Nel testo manca ovviamente l'ipotesi che f sia derivabile n volte in x_0 .

Per $n = 1$, dalla regola della catena, segue che si ha $(h \circ f)' = h' \circ f \cdot f'$ e da (i), per induzione, segue che

$$(h \circ f)^{(n)} = (h' \circ f \cdot f')^{(n-1)} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (h' \circ f)^{(k)} f^{(n-k)}, \quad \forall n \geq 1. \quad (***)$$

Siano f e g due funzioni derivabili $n \geq 2$ volte in x_0 . Dimostrare: (i) fg è derivabile n volte in x_0 ; (ii) se $f(x_0) \neq 0$, allora $1/f$ è derivabile n volte in x_0 ; (iii) se h è derivabile n volte in $y_0 = f(x_0)$, allora $h \circ f$ è derivabile n volte in x_0 .

Es 3.27 Per semplicità di notazione assumiamo $x_0 = 0$ (alla fine si potrà sostituire, in ogni enunciato, x con $(x - x_0)$) e tutti i limiti saranno per $x \rightarrow 0$. Tutti i risultati seguono dall'algebra dei limiti.

(i): Se $f = o(x^n)$ e $0 \leq m < n$, allora,

$$\lim \frac{f}{x^m} = \lim \left(\frac{f}{x^n} \cdot x^{n-m} \right) = \lim \frac{f}{x^n} \cdot \lim x^{n-m} = 0.$$

(ii): $\lim \frac{fg}{x^{n+m}} = \lim \frac{f}{x^n} \cdot \lim \frac{g}{x^m} = 0$. Per la seconda affermazione, si ha:

$$\lim \left| \frac{af + bg}{x^p} \right| \leq |a| \lim \left| \frac{f}{x^p} \right| + |b| \lim \left| \frac{g}{x^p} \right| \leq |a| \lim \left| \frac{f}{x^n} \right| + |b| \lim \left| \frac{g}{x^m} \right| = 0.$$

(iii) segue immediatamente dalla definizione.

Es 3.28 (i)

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sinh^2 x} dx &= - \int (\coth x)' x dx = -x \coth x + \int \frac{\cosh x}{\sinh x} dx \\ &= -x \coth x + \int \frac{1}{\sinh x} d \sinh x \\ &= -x \coth x + \log |\sinh x|. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sinh^4 x} dx &= - \int \frac{1}{\sinh^2 x} (\coth x)' dx = - \int (1 + \coth^2 x) d \coth x \\ &= - \coth x - \frac{\coth^3 x}{3}. \end{aligned}$$

Es 3.29 Sia F tale che $F'(x) = f(x)$ per $|x| < a$. Sia $G(x) := F(-x)$, allora $G'(x) = -F'(-x) = -f(-x) = f(x)$. Quindi, $F(x) = F(-x) + c$ e calcolando tale relazione in 0 si trova $c = 0$ e dunque F è pari.

Es 3.30 Sia F tale che $F'(x) = f(x)$ per $|x| < a$. Sia $G(x) := -F(-x)$, allora $G'(x) = F'(-x) = f(-x) = f(x)$. Quindi, $F(x) = -F(-x) + b$ con $b = 2F(0)$. Allora, $F + c$ con $c := -b/2$ è dispari.

Capitolo 4

Es 4.1 NB: si assuma anche che $I \cap J = \emptyset$.

Siano $\alpha = \sup I$ e $\beta = \inf J$. Poiché $I \leq J$, $\alpha \leq \beta$. Se $\alpha = \beta$, ci sono due casi, o α appartiene ad uno degli intervalli, ed in tal caso, $I \sqcup J$ è un intervallo e $I' = \emptyset$, oppure, $\alpha \notin I \cup J$, nel qual caso, $I' = \{\alpha\}$ e $I \sqcup I' \sqcup J$ è un intervallo.

Se $\alpha < \beta$, allora I' sarà l'intervallo di estremo sinistro α ed estremo destro β e tali estremi apparterranno o meno a I' a seconda se appartengono o meno a I o J (ad esempio, se $\alpha \in I$ e $\beta \notin J$, $I' = (\alpha, \beta]$, etc.).

Es 4.2 Se $E \in \mathcal{E}$ esistono m intervalli disgiunti J_k , $1 \leq k \leq m$, tali che $E = \sqcup_k J_k$. Usando il punto (i) dell'Es 2.11, possiamo facilmente ridurci al caso in cui che gli intervalli J_k siano totalmente ordinati: $J_1 < J_2 < \dots < J_m$. La tesi segue ora dall'Es 4.1.

Es 4.3 Sia ha

$$[-3, -2) \cup (1, \sqrt{2}] \cup \bigcup_{i=1}^5 (-1)^i (-4 + i, -3 + i) = \bigsqcup_{j=1}^7 I_j$$

con

$$I_1 = \{3\}; \quad I_2 = (-3, -2); \quad I_3 = (-2, -1); \quad I_4 = (-1, 0); \quad I_5 = (0, 1); \\ I_6 = (1, \sqrt{2}]; \quad I_7 = (\sqrt{2}, 2).$$

Dunque, si ha

$$\alpha_1 = -2; \quad \alpha_2 = -2; \quad \alpha_3 = 0; \quad \alpha_4 = 0; \quad \alpha_5 = 0; \quad \alpha_6 = 5; \quad \alpha_7 = 0; \\ \beta_1 = 0; \quad \beta_2 = -1; \quad \beta_3 = 1; \quad \beta_4 = -1; \quad \beta_5 = 1; \quad \beta_6 = -1; \quad \beta_7 = -1.$$

Es 4.4 Per ogni $n \geq 2$, siano I_i i seguenti n intervalli:

$$I_1 = \left(0, \frac{1}{n}\right); \quad I_i = \left[\frac{(i-1)}{n}, \frac{i}{n}\right), \quad \forall 2 \leq i \leq n.$$

Si noti che

$$\sum_{i=1}^n \chi_{I_i} = \chi_{(0,1)}. \quad (*)$$

Si definiscano poi

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{n} \chi_{I_i}, \quad \psi_n = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \chi_{I_i}$$

Per ogni $x \in (0, 1)$ si ha $\varphi_n(x) \leq x \leq \psi_n(x)$ e

$$\int_{(0,1)} (\psi_n - \varphi_n) = \int_{(0,1)} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \chi_{I_i} = \frac{1}{n} \int_{(0,1)} \sum_{i=1}^n \chi_{I_i} \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{n} \rightarrow 0, \text{ per } n \rightarrow +\infty.$$

Dunque la funzione $f(x) = x$ è Riemann integrabile su $(0, 1)$. Ricordando (Es 1.28-(i)) che

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2},$$

si ha che il valore dell'integrale di f su $(0, 1)$ è dato da

$$\begin{aligned} \int_{(0,1)} f &= \lim \int_{(0,1)} \psi_n = \lim \int_{(0,1)} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \chi_{I_i} = \lim \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \int_{(0,1)} \chi_{I_i} = \lim \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i \\ &= \lim \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Analogamente, se $f(x) = x^2$ e gli I_i sono come sopra, definiamo

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^n \frac{(i-1)^2}{n^2} \chi_{I_i}, \quad \psi_n = \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^2} \chi_{I_i}$$

Per ogni $x \in (0, 1)$ si ha $\varphi_n(x) \leq x \leq \psi_n(x)$ e

$$\int_{(0,1)} (\psi_n - \varphi_n) = \int_{(0,1)} \sum_{i=1}^n \frac{2i-1}{n^2} \chi_{I_i} \leq \frac{2}{n} \int_{(0,1)} \sum_{i=1}^n \chi_{I_i} \stackrel{(*)}{=} \frac{2}{n} \rightarrow 0, \text{ per } n \rightarrow +\infty.$$

Dunque la funzione $f(x) = x^2$ è Riemann integrabile su $(0, 1)$. Ricordando (Es 1.28-(ii)) che

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

si ha che il valore dell'integrale di f su $(0, 1)$ è dato da

$$\begin{aligned} \int_{(0,1)} f &= \lim \int_{(0,1)} \psi_n = \lim \int_{(0,1)} \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^2} \chi_{I_i} = \lim \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^2} \int_{(0,1)} \chi_{I_i} = \lim \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \\ &= \lim \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Es 4.5 Poiché $\{\alpha_n\}$ è limitata, esiste $\alpha > 0$ tale che $-\alpha \leq \alpha_n \leq \alpha$. Per ogni $n \geq 1$, siano

$$\varphi_n := -\alpha \chi_{\left[0, \frac{1}{n+1}\right)} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{I_i}, \quad \psi_n := \alpha \chi_{\left[0, \frac{1}{n+1}\right)} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{I_i}.$$

Allora, $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ e

$$\int_{[0,1]} (\psi_n - \varphi_n) = \int_{\left[0, \frac{1}{n+1}\right)} (\psi_n - \varphi_n) = \frac{2\alpha}{n+1} \rightarrow 0,$$

e quindi $f \in \mathcal{R}([0, 1])$. Inoltre,

$$\int_{[0,1]} f = \lim \int_{[0,1]} \psi_n = \lim \left(\frac{\alpha}{n+1} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{1}{i(i+1)} \right) = \lim \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i} \right).$$

Es 4.6 In ogni intervallo $J \subseteq [0, 1]$ con $|J| > 0$ esistono numeri razionali e numeri irrazionali, e dunque, $\sup_J \chi_Q = 1$ e $\inf_J \chi_Q = 0$. Da questo seguì immediatamente che $\mathcal{I}_I^+(f) = 1$ e $\mathcal{I}_I^-(f) = 0$.

Es 4.7 Se due dei punti a, b o c coincidono la (4.37) è banalmente vera, dunque basta considerare i casi in cui i punti sono diversi tra loro, ed in tal caso, vi sono sei casi:

$$c < a < b, \quad a < c < b, \quad a < b < c, \quad c < b < a, \quad b < c < a, \quad b < a < c.$$

Il primo caso è svolto a pag. 150.

Se $a < c < b$, allora

$$\int_a^c f + \int_c^b f \stackrel{(4.34)}{=} \int_a^b f.$$

Se $a < b < c$, allora

$$\int_a^c f + \int_c^b f := \int_a^c f - \int_b^c f \stackrel{(4.34)}{=} \int_a^b f + \int_b^c f - \int_c^b f = \int_a^b f.$$

Se $c < b < a$, allora

$$\int_a^c f + \int_c^b f := -\int_c^a f + \int_c^b f \stackrel{(4.34)}{=} -\int_c^b f - \int_b^a f + \int_c^b f = -\int_b^a f =: \int_a^b f.$$

Se $b < c < a$, allora

$$\int_a^c f + \int_c^b f := -\int_c^a f - \int_b^c f \stackrel{(4.34)}{=} -\int_b^a f =: \int_a^b f.$$

Se $b < a < c$, allora

$$\int_a^c f + \int_c^b f := \int_a^c f - \int_b^c f \stackrel{(4.34)}{=} \int_a^c f - \int_b^a f - \int_a^c f = -\int_b^a f =: \int_a^b f.$$

Es 4.8 Possiamo assumere che $I = (a, b)$. Dalle ipotesi segue che esiste $x_0 \in I$ tale che $f(x_0) = r > 0$, per permanenza del segno, esiste un intorno U di x_0 tale che $f \geq r/2$ sull'intervallo $J := I \cap U$. Sia $\varphi(x) = \frac{r}{2} \chi_J$, allora, su (a, b) , si ha $f \geq \varphi(x)$ e

$$\int_{(a,b)} f \geq \int_{(a,b)} \varphi = \frac{r}{2} \cdot |J| > 0.$$

Es 4.9 Poiché $\frac{1}{b-a} \int_a^b f = \frac{1}{a-b} \int_b^a f$ si può assumere che $a < b$. In tal caso si ha

$$(\inf_I f)(b-a) \leq \int_b^a f \leq (\sup_I f)(b-a),$$

e, dunque,

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f \in [\inf_I f, \sup_I f],$$

e la tesi segue dal teorema del valor medio per funzioni continue.

Es 4.10 Sia $a = \inf I$ e $b = \sup I$. Allora $g \in \mathcal{R}(I)$ se e solo se $g \in \mathcal{R}((a, b))$; e analogamente sugli intervalli (a, x_0) e (x_0, b) . Ma su tali intervalli f_α e f coincidono e la tesi segue per additività dell'integrale.

Es 4.11 La tesi segue immediatamente dal Teorema 4.24–(c).

Es 4.12 (i) Per induzione su $n \geq 0$. Per $n = 0$

$$\varphi_0^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} \varphi_0(x), \quad \deg P_n = n - 1. \quad (**)$$

vale banalmente con $P_0 \equiv 1$ (si ricordi che il grado di un polinomio identicamente costante è per definizione -1). Assumiamo che $(*)$ valga per $n \geq 0$. Allora, per $x > 0$, essendo $\varphi'_0 = \varphi_0/x^2$, si ha

$$\begin{aligned} \varphi_0^{(n+1)}(x) &= D\varphi_0^{(n)}(x) \stackrel{(*)}{=} D\left(\frac{P_n(x)}{x^{2n}} \varphi_0(x)\right) = \frac{P'_n(x)x^2 - 2nxP_n(x) + P_n(x)}{x^{2(n+1)}} \\ &=: \frac{P_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)}} \varphi_0(x), \quad \deg P_{n+1} = n + 1. \end{aligned}$$

Poiché (limite notevole)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varphi_0}{x^m} = 0, \quad \forall m,$$

da $(*)$ segue che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi_0^{(n)}(x) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Banalmente, (essendo $\varphi_0 \equiv 0$ per $x \leq 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi_0^{(n)}(x) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Applicando (iterativamente) il Corollario 3.16 segue che $\varphi_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$ e che $\varphi_0^{(n)}(0) = 0$ per ogni n .

(ii) $\varphi_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$ essendo prodotto (e composizione) di funzioni C^∞ . Per $x \leq 0$ o $x \geq 1$ (che è equivalente a $(1-x) \leq 0$), $\varphi_1 \equiv 0$. Per $0 < x < 1$, che equivale a: $0 < 1-x < 1$, sia $\varphi_0(x)$ che $\varphi_0(1-x)$ sono strettamente positive e quindi $\varphi_1(x) > 0$ per $x \in (0, 1)$.

(iii) Se $x \leq 0$, $\varphi \equiv 0$ che è ovviamente $C^\infty(-\infty, 0]$. Se $x \geq 0$, dal teorema fondamentale del calcolo segue che $\varphi' = c_0 \varphi_1$ e quindi essendo $\varphi_1 \in C^\infty$, per il punto precedente, segue che $\varphi \in C^\infty([0, +\infty))$. Inoltre, dal punto (i) segue che $\varphi_1^{(n)} = F_n \varphi_0$ per una opportuna funzione $F_n \in C^\infty([0, +\infty))$ e quindi $\varphi_1^{(n)}(0) = 0$ per ogni n , il che mostra che $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Se $x \geq 1$, essendo $\varphi_1(x) = 0$, si ha, per definizioni di c_0 , che

$$\varphi(x) = c_0 \int_0^x \varphi_1 = c_0 \int_0^1 \varphi_1 = 1.$$

Per $0 < x < 1$, come già osservato $\varphi'(x) = c_0 \varphi_1(x)$ che, per il punto precedente, è un numero strettamente positivo.

(iv) Dato $\rho > 1$ definiamo

$$\hat{\psi}_\rho(x) := \varphi(x) \cdot \varphi(\rho + 1 - x), \quad (\rho > 1).$$

Si verifica immediatamente che $\hat{\psi} \in C^\infty(\mathbb{R})$ e che $\hat{\psi}_\rho(x) = 0$ se $x \leq 0$ o $x \geq \rho + 1$, $\hat{\psi}_\rho(x) = 1$ se $1 \leq x \leq \rho$, e che $\hat{\psi}'_\rho(x) > 0$ se $0 < x < 1$, e $\hat{\psi}'_\rho(x) < 0$ se $\rho < x < \rho + 1$. È anche facile verificare che la (o, meglio, una) funzione cercata è data da

$$\psi_\delta(x) = \hat{\psi}_\rho\left(\frac{x-a}{\delta}\right), \quad \text{con } \rho := \frac{b-a}{\delta} - 1.$$

(v) Poiché $\psi_\delta = 0$ fuori da (a, b) , $\psi_\delta = 1$ su $(a + \delta, b - \delta)$ ed è un numero compreso tra 0 e 1 negli intervalli $(a, a + \delta)$ e $(b - \delta, b)$, si ha che

$$\begin{aligned} \int_I |\chi_{[a,b]} - \psi_\delta| &= \int_a^{a+\delta} |\chi_{[a,b]} - \psi_\delta| + \int_{b-\delta}^b |\chi_{[a,b]} - \psi_\delta| \\ &= \int_a^{a+\delta} (1 - \psi_\delta) + \int_{b-\delta}^b (1 - \psi_\delta) < \int_a^{a+\delta} 1 + \int_{b-\delta}^b 1 \\ &= 2\delta. \end{aligned}$$

Es 4.13 (i) L'integrale diverge: per $n \geq 1$, sia

$$I_n := \left[n\pi + \frac{\pi}{4}, n\pi + \frac{3}{4}\pi\right], \quad f := c \sum_{n \geq 1} \chi_{I_n}$$

con $c = (\arctan \pi)/\sqrt{2}$. Allora, per ogni $x \geq \pi$,

$$|\sin x| \arctan x > f(x) \implies \int_0^{n\pi} f \geq \int_\pi^{n\pi} f \geq (n-1)c\pi/2 \rightarrow +\infty.$$

(ii): Diverge in $x = 1$ (in $+\infty$ converge): vicino a 1, per confronto asintotico, essendo $x^x - 1 = e^{x \log x} - 1 \sim x \log x$, l'integrale si comporta come

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2 \log^2 x} \approx \int_1^2 \frac{dx}{\log^2 x} = \int_0^{\log 2} \frac{e^t dt}{t^2} \approx \int_0^{\log 2} \frac{dt}{t^2},$$

e quest'ultimo integrale diverge.

Es 4.14 (i):

$$\int_0^{1/2} |\log x|^\alpha dx = \int_2^\infty (\log t)^\alpha t^{-2} dt < +\infty, \quad \forall \alpha.$$

Ora,

$$\int_{1/2}^1 |\log x|^\alpha dx \approx \int_{1/2}^1 (1-x)^\alpha dx = \int_0^{1/2} t^\alpha dt < +\infty,$$

se e solo se $\alpha > -1$. In definitiva, l'integrale è convergente se e solo $\alpha > -1$.

(ii): Per $0 < \alpha \leq 5$, l'integrando si comporta come c/x , con $c > 0$ e l'integrale diverge; per $x > 5$ l'integrando si comporta come $1/x^{\alpha-4}$ e l'integrale converge. In definitiva, l'integrale converge se e solo se $x > 5$.

(iii):

$$\int_0^1 \frac{1-x^x}{(\sin \pi x)^\alpha} dx \approx \int_0^1 \frac{|x \log x|}{(\sin \pi x)^\alpha} dx.$$

Ora,

$$\int_0^{1/2} \frac{|x \log x|}{(\sin \pi x)^\alpha} dx \approx \int_0^{1/2} x^{1-\alpha} |\log x| dx = \int_2^\infty \frac{\log t}{t^{3-\alpha}} dt,$$

che converge se e solo se $3 - \alpha > 1$, ossia, $\alpha < 2$. Inoltre,

$$\int_{1/2}^1 \frac{|x \log x|}{(\sin \pi x)^\alpha} dx \approx \int_{1/2}^1 \frac{1-x}{(1-x)^\alpha} dx = \int_0^{1/2} t^{1-\alpha} dt < +\infty$$

se e solo se $\alpha < 2$. Quindi l'integrale converge se e solo se $\alpha < 2$.

(iv):

$$\int_0^2 \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x\right)^\alpha}{\sqrt{\log(1+x)}} dx \approx \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx < +\infty$$

(per ogni α). Inoltre,

$$\int_2^\infty \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x\right)^\alpha}{\sqrt{\log(1+x)}} dx = \int_2^\infty \frac{\left(\operatorname{Arctan} \frac{1}{x}\right)^\alpha}{\sqrt{\log(1+x)}} dx \approx \int_2^\infty \frac{dx}{x^\alpha \sqrt{\log x}} < +\infty$$

se e solo se $\alpha > 1$. In alternativa,

$$\int_2^\infty \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x\right)^\alpha}{\sqrt{\log(1+x)}} dx \approx \int_2^\infty \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x\right)^\alpha}{\sqrt{\log x}} dx$$

e facendo il cambio di variabile $y = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x$ e ponendo $y_0 = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} 2$ si ha

$$\begin{aligned} \int_2^\infty \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x\right)^\alpha}{\sqrt{\log x}} dx &= \int_0^{y_0} \frac{y^\alpha}{\sqrt{\log(1 + \cotan y)}} \frac{1}{\sin^2 y} dy \\ &\approx \int_0^{y_0} \frac{y^{\alpha-2}}{\sqrt{|\log y|}} dy < +\infty \end{aligned}$$

se e solo se $\alpha > 1$.

(v):

$$\int_0^{3/2} \frac{|\log x|}{(\cos x)^\alpha} dx \approx \int_0^{3/2} |\log x| < +\infty$$

(per ogni α).

$$\begin{aligned} \int_{3/2}^{\pi/2} \frac{|\log x|}{(\cos x)^\alpha} dx &\approx \int_{3/2}^{\pi/2} \frac{1}{(\cos x)^\alpha} dx = \int_0^{(\pi-3)/2} \frac{1}{(\sin t)^\alpha} dt \\ &\approx \int_0^{(\pi-3)/2} \frac{1}{t^\alpha} dt < +\infty \end{aligned}$$

se e solo se $\alpha < 1$. In conclusione, l'integrale converge se e solo se $\alpha < 1$

(vi):

$$\begin{aligned} \int_{\pi/2}^2 \frac{(|\cos x| \sinh x^{-1})^\alpha}{\arctan(x - \pi/2)} dx &\approx \int_{\pi/2}^2 \frac{|\cos x|^\alpha}{\arctan(x - \pi/2)} dx \\ &= \int_{\pi/2}^2 \frac{|\sin(x - \pi/2)|^\alpha}{\arctan(x - \pi/2)} dx \\ &\approx \int_{\pi/2}^2 |x - \pi/2|^{\alpha-1} < +\infty, \end{aligned}$$

se e solo se $\alpha > 0$.

$$\int_2^{+\infty} \frac{(|\cos x| \sinh x^{-1})^\alpha}{\arctan(x - \pi/2)} dx \approx \int_2^{+\infty} \frac{|\cos x|^\alpha}{x^\alpha} dx < +\infty$$

se e solo se $\alpha > 1$. In conclusione, l'integrale converge se e solo se $\alpha > 1$.

Es 4.15 Si può prendere, ad esempio, $I_n := [n, n + 1/n^2]$ e $f = \sum_{n \geq 1} (-1)^n n \chi_{I_n}$.

Es 4.16 Integrando per parti, si ha

$$\alpha_n = (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} = \frac{2n+1}{n^2+n} \frac{1}{\pi} + r_n, \quad r_n := (-1)^{n+1} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\cos x}{x^2}.$$

Ed essendo

$$|r_n| \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{n(n+1)},$$

segue che $\alpha_n \sim \frac{2}{\pi} \frac{1}{n}$ per $n \rightarrow +\infty$. Dunque, esiste $N > 0$ tale che $\alpha_n > \frac{1}{2n}$ (essendo $2/\pi > 1/2$). Quindi, se $n > N$,

$$\begin{aligned} \int_{n\pi}^{2n\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| &= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n+k} > \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2(n+k)} \\ &\geq \frac{1}{2(2n-1)} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = \frac{n}{2(2n-1)} > \frac{1}{2} \frac{n}{2n} \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (*)$$

Ma questo implica che $\int_{n\pi}^{2n\pi} \left| \frac{\sin x}{x} \right| = +\infty$, perché se l'integrale fosse finito, per (4.57), si avrebbe

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{n\pi}^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| = 0$$

che contraddice la (*).

Es 4.17 Consideriamo il caso del seno. Sia $b > a$, allora, integrando per parti, si trova:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \sin x \, dx &= [-f(x) \cos x]_a^b + \int_a^b f'(x) \cos x \, dx \\ &= (f(a) \cos a - f(b) \cos b) + \int_a^b f'(x) \cos x \, dx. \end{aligned}$$

Dalle ipotesi segue che $f'(x) \leq 0$ e dunque

$$\left| \int_a^b f'(x) \cos x \, dx \right| \leq \int_a^b |f'(x)| |\cos x| \, dx \leq \int_a^b |f'(x)| \, dx = - \int_a^b f'(x) \, dx = f(a) - f(b).$$

Quindi, prendendo il limite per $b \rightarrow +\infty$ si vede che $x \rightarrow f'(x) \cos x \in \mathcal{R}_1^*([a, +\infty))$ e che $x \rightarrow f(x) \cos x \in \mathcal{R}([a, +\infty))$.

Il caso del coseno si tratta in maniera analoga.

Es 4.18 Sia $G(x) = \int_0^x g(t) \, dt$ e sia $T > 0$ il periodo di g , allora

$$G(x+T) - G(x) \stackrel{(4.50)}{=} G(T) - G(0) = \int_0^T g(t) \, dt = 0,$$

ossia, G è periodica di periodo T .

Poniamo $c_0 := \frac{1}{T} \int_0^T G(t) dt$, allora $G_0 := G - c_0$ è una primitiva di g e $\frac{1}{T} \int_0^T G_0 = 0$.

Se G_1 è un'altra primitiva di g a media nulla, allora $G_1 = G_0 + c$ con $c \in \mathbb{R}$; ma $0 = \frac{1}{T} \int_0^T (G_1 - G_0) = c$ e quindi $G_1 = G_0$ e quindi vi è una sola primitiva di g a media nulla.

Assumiamo ora che la media di g , $\frac{1}{T} \int_0^T g(t) dt = m \neq 0$. Una qualunque primitiva G_1 di g sarà della forma $G_1 = c + G$ con G , come sopra. Allora, da (4.50), segue che, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$G(nT) = \int_0^{nT} g(t) dt = nm.$$

Quindi $G_1(nT) = c + nm$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_1(nT) = \text{sgn}(m) \infty$, e questo implica che G_1 non può essere periodica (altrimenti sarebbe limitata).

Es 4.19 Sia G una primitiva di g . Allora, integrando per parti,

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \int_a^b f(x)G'(x) dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x) dx.$$

Per l'Es. 4.18, G è periodica (e dunque limitata). Quindi, si può ripetere l'argomento usato nella soluzione dell'Es. 4.17.

Es 4.20 (i) Siano D_1 e D_2 dati da

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in E_1, g_1(x) \leq y \leq f_1(x)\},$$

$$D_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in E_2, g_2(x) \leq y \leq f_2(x)\},$$

due domini normali con $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. Questo implica che l'intervallo $E := E_1 \cap E_2$ è non vuoto. È immediato verificare che

$$D_1 \cap D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in E, \max\{g_1(x), g_2(x)\} \leq y \leq \min\{f_1(x), f_2(x)\}\},$$

e quindi (essendo $\max\{g_1, g_2\}$ e $\min\{f_1, f_2\}$) integrabili, $D_1 \cap D_2$ è un dominio normale.

(ii) Siano E_i le basi dei D_i e E'_j le basi dei D'_j . Se $E_i \cap E'_j \neq \emptyset$, chiamiamo E_{ij} l'intervallo $E_i \cap E'_j$. Nel seguente argomento consideriamo solo le coppie (i, j) per cui $E_i \cap E'_j \neq \emptyset$. Si osservi che

$$D_{ij} := D \cap \{(x, y) \mid x \in E_{ij}, y \in \mathbb{R}\}$$

è un dominio normale e che si hanno le seguenti identità:

$$D_i = \cup_j D_{ij}, \quad D'_j = \cup_i D_{ij}, \quad D = \cup_{i,j} D_{ij}$$

dove tutte le unioni sono disgiunte. Dunque si ha

$$\begin{aligned} \sum_i \text{area}(D_i) &= \sum_i \text{area}(\cup_j D_{ij}) = \sum_i \sum_j \text{area}(D_{ij}) = \sum_j \sum_i \text{area}(D_{ij}) \\ &= \sum_j \text{area}(\cup_i D_{ij}) = \sum_j \text{area}(D'_j), \end{aligned}$$

che è quanto dovevasi dimostrare.

Es 4.21 Siano

$$a_k := \frac{1}{2\pi k + \pi}, \quad c_k := \frac{1}{2\pi k + \pi/2}, \quad b_k := \frac{1}{2\pi k},$$

e chiamiamo Γ_k il grafico di f su $[a_k, b_k]$. Chiaramente,

$$\ell(G_f) \geq \sum_{k=1}^n \ell(\Gamma_k), \quad \forall n. \quad (*)$$

Su $[a_k, b_k]$, $f \geq 0$, e dalla definizione di lunghezza di arco di curva segue che

$$\ell(\Gamma_k) \geq 2\ell(\sigma_k),$$

dove σ_k denota il segmento di estremi $(c_k, f(c_k))$ e $(b_k, 0)$. A sua volta (per definizione di lunghezza di un segmento), essendo $f(c_k) > 0$,

$$\ell(\sigma_k) > \ell(\sigma((c_k, f(c_k)), (c_k, 0))) = f(c_k) = c_k \operatorname{sen}(1/c_k) = c_k = \frac{1}{2\pi k + \frac{\pi}{2}} > \frac{1}{(2k+1)\pi}.$$

Dunque, da (*), segue che

$$\ell(G_f) \geq \sum_{k=1}^n \frac{2}{(2k+1)\pi} > \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}, \quad \forall n.$$

La somma $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}$ può essere interpretata come un integrale. Infatti, se denotiamo con

$$\varphi_k := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \chi_{[k, k+1)},$$

si ha che

$$\int_1^{n+1} \varphi_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1}. \quad (**)$$

Ora, sull'intervallo $[k, k+1)$, si ha

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{k+1} \geq \frac{1}{x+1},$$

e, dunque, per (**), si ha che, per ogni n ,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \int_1^{n+1} \varphi_k \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x+1} = \log\left(\frac{n}{2} + 1\right),$$

e, poiché per $n \rightarrow +\infty$, tale quantità tende a $+\infty$, segue da (*) che $\ell(G_f) = +\infty$.

Es 4.22 La (4.84) segue immediatamente dalle proprietà elementari dei numeri complessi e (l'ultima relazione) dalla definizione di derivata di funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ e dalle derivate di seno e coseno.

La (4.85) segue dalle definizioni date e dalle formula di addizione di seno e coseno.

La (4.86) segue per induzione su n : $n = 1$ è ovvia, da (4.86) segue la relazione con $(n + 1)$ al posto di n grazie alla (4.85).

Dimostriamo (4.88). Sia $z = x + iy$ e $w = u + iv$. Allora,

$$\begin{aligned} e^z e^w &= e^{x+iy} e^{u+iv} := e^x e^{iy} e^u e^{iv} = e^{x+u} e^{iy} e^{iv} \stackrel{(4.85)}{=} e^{x+u} e^{i(y+v)} \\ &=: e^{x+u+i(y+v)} = e^{z+w}. \end{aligned}$$

Es 4.23 NB: la specifica $x \neq 0$ va intesa mod 2π , ossia $x \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Per la formula per la somma geometrica (in $\mathbb{C}$) con $z \neq 1$, si ha che

$$\sum_{n=1}^N z^n = \frac{z - z^{N+1}}{1 - z}, \quad z \neq 1. \quad (*)$$

Poiché $e^{ix} = 1$ se e solo se $x = 2\pi k$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, escludendo tali valori, ponendo $z = e^{ix}$ in (*), si ha

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N e^{inx} &= \frac{e^{ix} - e^{i(N+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{-i\frac{x}{2}}}{e^{-i\frac{x}{2}}} \cdot \frac{e^{ix} - e^{i(N+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{i\frac{x}{2}} - e^{i(N+\frac{1}{2})x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} \\ &\stackrel{(4.84)}{=} i \frac{e^{i\frac{x}{2}} - e^{i(N+\frac{1}{2})x}}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}} \\ &= \frac{(-\operatorname{sen} \frac{x}{2} + \operatorname{sen}(N + \frac{1}{2})x) + i(\cos \frac{x}{2} - \cos(N + \frac{1}{2})x)}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Prendendo parte reale e immaginaria di tale relazione (e usando la formula di Eulero) seguono le identità di Lagrange.

Es 4.24 Le soluzioni dell'oscillatore armonico smorzato sono descritte al paragrafo § 4.6.3, e, in particolare, dalle formule (4.97), (4.98) e (4.100) dove $a := m > 0$, $b := \mu \geq 0$, $c := k > 0$, $\Delta := \mu^2 - 4mk$, $\alpha = -\mu/2m$.

Vanno distinti quattro casi: (a) *attrito forte*: $\mu^2 > 4mk$; (b) *attrito debole*: $0 < \mu^2 < 4mk$; (c) *attrito critico*: $\mu^2 = 4mk$; (d) *senza attrito*: $\mu = 0$

(a) *attrito forte*: le soluzioni sono date, al variare di $A, B \in \mathbb{R}$, da

$$x(t) = Ae^{\lambda_+ t} + Be^{\lambda_- t}, \quad \lambda_{\pm} := \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4mk}}{2m} < 0.$$

(b) *attrito debole*: le soluzioni sono date, al variare di $A, B \in \mathbb{R}$, da

$$x(t) = Ae^{-\frac{\mu}{2m}t} \cos \omega t + Be^{-\frac{\mu}{2m}t} \sin \omega t, \quad \omega := \frac{\sqrt{4mk - \mu^2}}{2m}.$$

(c) *attrito critico*: le soluzioni sono date, al variare di $A, B \in \mathbb{R}$, da

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\frac{\mu}{2m}t}.$$

(d) *senza attrito*: le soluzioni sono date, al variare di $A, B \in \mathbb{R}$, da

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad \omega := \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Se c'è attrito ($\mu > 0$) tutte le soluzioni tendono alla soluzione nulla $x_\infty(t) \equiv 0$, però dinamicamente il comportamento è diverso: nel caso di attrito forte non ci sono oscillazioni: la costante elastica non permette al punto di massa m di oscillare attorno all'origine; nel caso di attrito debole ci sono invece infinite oscillazioni attorno all'origine, ma l'ampiezza decade rapidamente (esponenzialmente) nel tempo; nel caso di attrito critico non ci sono oscillazioni, ma per tempi piccoli, la soluzione si comporterà linearmente come $A + Ct$; infine nel caso senza attrito ci saranno infinite oscillazione di uguale ampiezza $\sqrt{A^2 + B^2}$ attorno all'origine.

L'equazione di un *oscillatore armonico smorzato* è dato da (4.90) con $a = m > 0$ (massa del punto materiale), $b = \mu \geq 0$ (costante di attrito) e $k > 0$ costante elastica della molla che attira verso l'origine il punto materiale con forza proporzionale allo spostamento dal punto di equilibrio. Descrivere tutti i moti di tale sistema e dire in quali casi esiste una soluzione limite (ossia, a cui ogni soluzione tende per $t \rightarrow +\infty$).

Es 4.25 (i) $p(t) := \frac{1}{1 - \omega^2} \sin \omega t$ è una soluzione di $\ddot{x} + x = \sin \omega t$.

(ii) La soluzione del problema di Cauchy dato è $x(t) = 2 \cos \omega t - \frac{\omega}{1 - \omega^2} \sin t + p(t)$.

Es 4.26 (i) $p(t) := -\frac{t}{2} \cos t$ è una soluzione di $\ddot{x} + x = \sin t$.

(ii) La soluzione del problema di Cauchy dato è $x(t) = \frac{1}{2} \sin t + 2 \cos t + p(t)$.

Es 4.27 Nel caso dell'oscillatore armonico, si conserva l'energia

$$E(t) := \frac{mp^2(t) + kx^2(t)}{2}, \quad p(t) = \dot{x}(t),$$

e quindi il moto percorre, nel piano delle fasi $\{(x, p) \in \mathbb{R}^2\}$, le curve di energia costante

$$E = \frac{mp^2 + kx^2}{2} = E_0 := E(0) = \frac{mp^2(0) + kx^2(0)}{2}.$$

Se $E_0 = 0$ (ossia $x(0) = \dot{x}(0) = 0$) la soluzione è il punto di equilibrio (stabile) $(x, p) = (0, 0)$. Se $E_0 > 0$ il moto percorre le ellissi di semiassi $a, b > 0$, date da

$$\frac{mp^2 + kx^2}{2} = E_0, \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{p}{a}\right)^2 + \left(\frac{x}{b}\right)^2 = 1 \text{ con } a := \frac{E_0^2}{m^2}, \quad b := \frac{E_0^2}{k^2}.$$

Per capire come vengono percorse le ellissi nello spazio delle fasi durante i moti, consideriamo una data ellissi di semiassi fissati e positivi. Se parametrizziamo il moto col tempo e assumiamo che al momento iniziale $t = 0$ la molla si trova a riposo nel punto di elongazione massima, ossia, si trova nel punto $(a, 0)$ dello spazio delle fasi, si ha che tale soluzione è data da $x = a \cos \omega t$. Dunque per tale soluzione si ha

$$(x(t), y(t)) := (a \cos \omega t, -mx_0 \omega \sin \omega t) = (a \cos \omega t, -b \cos \omega t)$$

il che, come si verifica immediatamente (ad esempio, controllando gli istanti $t = 0, \pi/2\omega, \pi/\omega, 3\pi/(2\omega)$) implica che l'ellissi è percorsa in senso *orario*.

Capitolo 5

$$\text{Es 5.1} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k < n} a_k + a_n + \sum_{k > n} a_k < \sum_{k < n} a_k + b_n + \sum_{k > n} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Es 5.2

$$\begin{aligned} \frac{x^m}{1-x} &= x^{m-1} \frac{x}{1-x} \stackrel{(5.3)}{=} x^{m-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x^{m+k-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=m}^{n+m-1} x^j = \sum_{j=m}^{\infty} x^j. \end{aligned}$$

$$\text{Es 5.3} \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Es 5.4 (i) diverge: per il criterio di Cauchy

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}(\log n)^2} \approx \sum \frac{2^{n/2}}{n^2} = +\infty$$

come segue dal criterio radice, essendo:

$$\left(\frac{2^{n/2}}{n^2} \right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow \sqrt{2} > 1;$$

oppure, essendo $\log n < n^{1/4}$, definitivamente si ha che, per m sufficientemente grande

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\log n)^2} \geq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

(ii) converge: per confronto asintotico

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1+n^4}{2^{n/2}} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{2^{n/2}}$$

che converge per il criterio radice, essendo:

$$\left(\frac{n^4}{2^{n/2}} \right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1/\sqrt{2} < 1.$$

(iii) converge: per criterio radice, $\left(\frac{n^{\sqrt{n}}}{(\log n)^n} \right)^{1/n} \rightarrow 0$.

Es 5.5 (i): La serie è a termini positivi. Per $x = \pm 1$,

$$\sum \frac{\log(1+x^{2n})}{n^x+n} \approx \sum \frac{1}{n} = +\infty.$$

Per $|x| < 1$,

$$\sum \frac{\log(1+x^{2n})}{n^x+n} \approx \sum \frac{x^{2n}}{n} < +\infty$$

(criterio della radice). Per $x > 1$,

$$\sum \frac{\log(1+x^{2n})}{n^x+n} \approx \sum \frac{1}{n^{x-1}} < +\infty$$

se e solo se $x > 2$. Per $x < -1$,

$$\sum \frac{\log(1+x^{2n})}{n^x+n} \approx \sum 1 = +\infty.$$

In definitiva la serie converge se e solo se $x \in (-1, 1) \cup (2, +\infty)$.

(ii): Consideriamo separatamente le due serie. Per $|x| > 1$,

$$\left| \frac{\sinh x^n}{\log \sqrt{n}} \right| \rightarrow +\infty$$

(e la serie non converge). Per $|x| < 1$,

$$\sum \frac{|\sinh x^n|}{\log \sqrt{n}} \approx \sum \frac{|x|^n}{\log n} < +\infty$$

(per il criterio della radice). Per $x = 1$ la serie diverge e per $x = -1$ converge condizionatamente per Leibniz. Quindi la prima serie, converge assolutamente per $|x| < 1$, converge condizionatamente per $x = -1$ e non converge altrimenti.

Passiamo alla seconda serie. Per $|x| \leq 1$,

$$\sum \left| \frac{\sqrt{n}}{x^n + n^2} \right| \approx \sum \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty.$$

Per $|x| > 1$,

$$\sum \left| \frac{\sqrt{n}}{x^n + n^2} \right| \approx \sum \frac{\sqrt{n}}{|x|^n} < +\infty$$

(per il criterio della radice). Quindi la seconda serie converge assolutamente per ogni x e il comportamento della serie completa è come quello della prima serie.

(iii): La serie è a termini non negativi e

$$\lim \left(\frac{x^{2n}}{e^{nx} + 1} \right)^{1/n} = \begin{cases} \frac{x^2}{e^x} & \text{se } x > 0 \\ x^2 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}.$$

Dunque, osservando che per $x \geq 0$, $x^2 e^{-x} < 1$, per il criterio della radice, si ha che la serie converge se $x > -1$ e diverge se $x < -1$; per $x = -1$, i termini della serie non a zero. In definitiva la serie converge se e solo se $x < -1$.

(iv) Poiché $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{\log n}}$ è convergente (per Leibniz) basta studiare il comportamento di

$$\sum \frac{x^{2n} + n^{2x}}{e^{nx} + 1} = \sum \frac{x^{2n}}{e^{nx} + 1} + \sum \frac{n^{2x}}{e^{nx} + 1}$$

(l'uguaglianza vale in ogni caso perché i termini sono positivi). La prima serie è quella di (iii). La seconda converge (radice) se $x > 0$; se $x = 0$ diverge; se $x < 0$, per confronto asintotico, si comporta come $\sum n^{2x}$ che converge se e solo se $x < -1/2$. In definitiva, la serie completa converge su $(-1, -1/2) \cup (0, +\infty)$ e diverge altrimenti.

(v): Se $|x| \leq 2$,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{|x|^n}{(x/2)^{2n} + \log n} \approx \sum \frac{|x|^n}{\log n}$$

che, per il criterio della radice, converge se $|x| < 1$ e non converge se $|x| > 1$.

Se $|x| > 2$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{|x|^n}{(x/2)^{2n} + \log n} \approx \sum \frac{4^n}{|x|^n}$$

che, per il criterio della radice, converge se $|x| > 4$ e non converge se $|x| < 4$. Quindi, la serie converge assolutamente per $\{|x| < 1\} \cup \{|x| > 4\}$ e non converge per $2 < |x| < 4$. Inoltre, se $x = \pm 2$, $x = \pm 4$ o $x = 1$ la serie non converge mentre per $x = -1$ converge condizionatamente per Leibniz (si noti che $\frac{1}{2^n} + \log n$ è definitivamente crescente, come è facile verificare). In definitiva, la serie converge assolutamente su $\{|x| < 1\} \cup \{|x| > 4\}$ e condizionatamente per $x = -1$, non converge altrimenti.

(vi): La serie converge per $x > 1$ e diverge altrimenti: per $x \leq 0$ i termini della serie non sono infinitesimi; per $x > 0$ la serie si comporta come $\sum \frac{n^{xn}}{2^{n^x}}$ che converge per $x > 1$ e diverge per $0 < x \leq 1$ (radice).

(vii): Sia $a_n(x) := (n!)^2 x^{n^2}$. Se $|x| \geq 1$, $|a_n(x)| \geq n!^2 \rightarrow +\infty$ e quindi la serie $\sum a_n(x)$ non converge. Se $|x| < 1$, $|a_n(x)| \leq n^{2n} |x|^{n^2}$ e poiché $(n^{2n} |x|^{n^2})^{1/n} = n^2 |x|^n \rightarrow 0$, per il criterio della radice, $\sum a_n(x)$ converge assolutamente.

Sia $b_n(x) := \left(\frac{x-3}{x+2}\right)^n$. Innanzitutto bisogna escludere il valore $x = -2$ dove $b_n(x)$ non è definita. La serie $\sum b_n(x)$ è una serie geometrica di ragione $y := \frac{x-3}{x+2}$ e dunque converge se e solo se $|y| < 1$ ossia se e solo se $x > 1/2$.

In conclusione, la serie converge assolutamente in $(1/2, 1)$ (essendo somma di serie assolutamente convergenti), non converge in $(-1, 1/2]$ (essendo $\sum a_n(x)$ convergente e $\sum b_n(x)$ non convergente). La serie non è infinitesima se $|x| \geq 1$ e $x \neq -2$: infatti

$$|a_n(x) - b_n(x)| \geq |a_n(x)| - |b_n(x)| \geq n!^2 - |y|^n \rightarrow +\infty;$$

quindi la serie non converge per il criterio necessario di Cauchy. In definitiva, la serie converge se e solo se $x \in (1/2, 1)$ ove converge assolutamente.

(viii): Sia

$$a_n = \left(\frac{nx}{nx^2 + 1} \right)^n \frac{1}{\log(\log(5+n))},$$

Se $x = 0$, $a_n = 0$ e la serie è identicamente nulla. Se $x \neq 0$, $\lim |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1/|x|$. Quindi, per il criterio della radice, la serie converge assolutamente se $|x| > 1$ e non converge per $0 < |x| < 1$.

Per $x = 1$,

$$a_n = 1/(e_n \log(\log(5+n))) \text{ con } e_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

e la serie diverge (ad esempio, per confronto con $1/n$).

Se $x = -1$,

$$a_n = (-1)^n (e_n \log(\log(5+n)))$$

e poichè $(e_n \log(\log(5+n)))$ è crescente (essendo crescenti sia e_n che $\log(\log(5+n))$), $1/e_n \log(\log(5+n))$ è decrescente e la serie converge per Leibnitz. In conclusione la serie converge assolutamente su $\{|x| > 1\} \cup \{0\}$, converge condizionatamente in $x = -1$ e non converge altrimenti.

Es 5.6 Sia $b_n = (-1)^{[n/3]}$ e B_n come in (5.17): è facile vedere che B_n è limitata e quindi la serie converge per il criterio di Dirichlet.

Es 5.7 La prima affermazione è ovvia e quanto alla seconda segue dal fatto che $r_n := a_{n+1}/a_n = 1$ se n è pari, mentre $r_n = 1$ se n è dispari.

Es 5.8 $\frac{b_n}{a_n} = 1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \rightarrow 1$, quindi $b_n \sim a_n$, che equivale a $a_b \sim b_n$.

Ma, $\sum a_n$ converge per Leibniz, mentre $\sum b_n \approx \sum \frac{1}{n}$ diverge (Proposizione 5.8-(ii) e divergenza serie armonica).

Es 5.9 (i): $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{j \leq (n+1)/2} \frac{1}{2j-1}$ e $\sum \frac{1}{2j-1} \approx \sum \frac{1}{j} = +\infty$. Quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \leq (n+1)/2} \frac{1}{2j-1} = +\infty.$$

(ii) $a_{2n} = \frac{1}{2^n}$ e $a_n = 0$ se $n \neq 2^k$ per ogni k : questo significa che

$$\sum a_n = \sum \frac{1}{2^n} < +\infty$$

(serie geometrica di ragione $1/2$).

Es 5.10 $a_{2n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}$, $a_{2n} = \frac{1}{2^{2n}}$, $a_{2n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}$. Ora, $a_{2n} < a_{2n+1}$:

$$a_{2n} < a_{2n+1} \iff \frac{1}{2^{2n}} < \frac{1}{2^{n+1}}$$

(il che è vero, essendo $4^n > 2n+1$, per ogni n , come è immediato verificare per induzione). D'altra parte, $a_{2n-1} > a_{2n}$:

$$a_{2n-1} = \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n+1} = a_{2n+1} > a_{2n}.$$

Quindi $\{a_n\}$ non è monotona.

Siano: $b_n := 1/n$ per n dispari e 0 per n pari; $c_n = -1/2^n$ per n pari e 0 per n dispari. Chiaramente, $(-1)^{n-1}a_n = b_n + c_n$, ma $\sum b_n$ diverge (Es 5.9-(i)), mentre $\sum c_n$ converge (Es 5.9-(ii)). Quindi, $\sum (-1)^{n-1}a_n$ diverge (Proposizione 5.8-(ii)).

Es 5.11 $\sum 2^n a_{2^n} = \sum 2^n \frac{1}{(2^n)^2} = \sum \frac{1}{2^n} < +\infty$. Ma

$$\sum a_n \geq \sum_{n \text{ dispari}} a_n = \sum_{n \text{ dispari}} \frac{1}{n} = +\infty$$

(per Es 5.9-(i)). Questo implica, in particolare, che $\{a_n\}$ non è monotona (altrimenti il criterio di convergenza di Cauchy sarebbe falso). Ma, naturalmente, è anche facile dimostrare direttamente che $\{a_n\}$ non è monotona.

Es 5.12

$$\left(\frac{1}{n^\varepsilon} - \frac{1}{(n+1)^\varepsilon}\right) = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\varepsilon - 1}{(n+1)^\varepsilon} \sim \frac{\varepsilon}{n(n+1)^\varepsilon} \sim \frac{\varepsilon}{n^{1+\varepsilon}}$$

Dunque, per ogni $\varepsilon > 0$, per il criterio di confronto asintotico,

$$\sum \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \approx \sum \left(\frac{1}{n^\varepsilon} - \frac{1}{(n+1)^\varepsilon}\right).$$

Quest'ultima è una serie telescopica e, poiché $\varepsilon > 0$,

$$\sum_1^n \left(\frac{1}{k^\varepsilon} - \frac{1}{(k+1)^\varepsilon}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^\varepsilon} \rightarrow 1,$$

segue che $\zeta(s) < +\infty$ se $s = 1 + \varepsilon > 1$.

Es 5.13 (i) Da (5.6) segue che $\gamma_n \in (0, 1]$ per ogni n .

$$\gamma_n - \gamma_{n+1} = \log(n+1) - \log n - \frac{1}{n+1} = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} = \frac{\log E_n - 1}{n+1} > 0$$

essendo $E_n > e$: dunque γ_n è strettamente decrescente. In particolare, $\gamma := \lim \gamma_n$ esiste ed è non negativo. Inoltre, $\gamma < \gamma_2 = \frac{3}{2} - \log 2 = 0,8\dots$

(ii) Per $n \geq 2$, si ha la seguente *rappresentazione telescopica* di $\log n$:

$$\log n = \sum_{k=1}^{n-1} \log((k+1) - \log k) = \sum_{k=1}^{n-1} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right), \quad (*)$$

da cui segue

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 - \log e_k}{k}.$$

Poiché, $\frac{1 - \log e_k}{k} > 0$, e sappiamo che $\gamma_n \rightarrow \gamma$ (e $1/n \rightarrow 0$), segue che

$$\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \log e_k}{k}.$$

Dunque,

$$\gamma > \sum_{k=1}^n \frac{1 - \log e_k}{k}, \quad \forall n,$$

che, per $n = 1$, dà $\gamma > 1 - \log 2 > 0,3$.

Es 5.14 Sia $D_2 = \{0, 1\}$, $D_2^{\mathbb{N}} = 2^{\mathbb{N}}$ l'insieme delle successioni a valori in D_2 e $\mathcal{D}_2$ l'insieme delle successioni non identicamente nulle $\{a_n\}$ con $a_n \in D_2$ e che non siano definitivamente uguali a 1, ossia

$$\mathcal{D}_2 := \{a = \{a_n\} \in D_2^{\mathbb{N}} \mid \exists a_n \neq 0 \text{ e } \forall k \exists h > k : a_h < 1\}.$$

Ad ogni successione $a \in D_2^{\mathbb{N}}$ associamo un numero reale $\tilde{\varphi}_2(a)$ come segue:

$$\tilde{\varphi}_2 : a = \{a_n\} \in \mathcal{D}_2 \mapsto \tilde{\varphi}_2(a) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k} \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

Chiamiamo φ_2 la restrizione di $\tilde{\varphi}_2$ a $\mathcal{D}_2$, ossia $\varphi_2 : a \in \mathcal{D}_2 \mapsto x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k} \in \mathbb{R}$.

Ad ogni $x \in (0, 1)$ associamo una successione

$$a = \psi_2(x) \in D_2^{\mathbb{N}} \text{ dove : } a_n := [y_n] \text{ e } \begin{cases} y_1 := 2 \cdot x \\ y_n := 2 \cdot \{y_{n-1}\}, \text{ se } n \geq 2. \end{cases}$$

A questo punto, come nella dimostrazione della Proposizione 5.7, si vede che la funzione φ_2 è una funzione biunivoca da $\mathcal{D}_2$ in $(0, 1)$ e la sua funzione inversa è la ψ_2 .

Es 5.15 Dall'Es 5.14 segue che

$$\mathcal{D}_2 \stackrel{\varphi_2}{\cong} (0, 1).$$

Sia $D := \mathcal{D}_2' \setminus \mathcal{D}_2$. D contiene la successione identicamente nulla, $\bar{0} := \{a_n\}$, $a_n = 0 \forall n$, e tutte le successioni di 0 e 1 con code infinite di 1, ossia,

$$D = \{\bar{0}\} \cup \bigcup_{n \geq 1} D_n, \quad D_n := \{\{a_k\} \mid a_k = 1 \forall k \geq n\}.$$

Ma D_n è un insieme finito: infatti, $\#D_n = 2^{n-1}$ (per ogni $1 \leq k \leq n-1$ ci sono due possibili scelte di a_k). Da questa osservazione, segue che D è numerabile (essendo unione numerabile di insiemi finiti) e dunque dall'Osservazione 1.68 (essendo $(0, 1)$ non numerabile) segue che

$$\mathcal{D}'_2 \stackrel{\varphi_2}{\cong} (0, 1).$$

Infine, poiché, chiaramente $(0, 1) \cong (n, n+1)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, e

$$\mathbb{R} = \mathbb{Z} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1)$$

segue che $\#\mathbb{R} = \#\mathcal{D}'_2$.

Es 5.16 $S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0$, etc., quindi (come è anche immediato verificare per induzione) $S_n = 1$ se n è dispari e $S_n = 0$ se n è pari. Se chiamiamo d_n il numero dei numeri dispari minori o uguali a n , ossia,

$$d_n = \#\{1 \leq k \leq n \mid k \text{ è dispari}\}$$

si ha che

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d_k.$$

D'altra parte si verifica immediatamente (sempre per induzione) che

$$d_n = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor,$$

e quindi

$$\frac{n+1}{2} \leq d_n < \frac{n+1}{2} + 1 = \frac{n+3}{2}.$$

Da questo segue che

$$\frac{1}{n} \frac{n+1}{2} \leq M_n \leq \frac{1}{n} \frac{n+3}{2},$$

e prendendo il limite per $n \rightarrow \infty$ in tale relazione si ha che $M_n \rightarrow 1/2$.

Es 5.17 Sia $M = \overline{\lim} a_n$. Se $L = +\infty$, allora $\{a_n\}$ non è limitata, e $\bar{a}_n = +\infty$ per ogni n e quindi $M = +\infty$.

Assumiamo $L \in \mathbb{R}$. Poiché $a_n \leq \bar{a}_n$ per ogni n , prendendo il limite, segue che $L \leq M$. Poiché $a_k \rightarrow L$, se $\varepsilon > 0$, esiste n tale che $a_k < L + \varepsilon$ per ogni $k \geq n$; prendendo l'estremo superiore in tale relazione segue che $\bar{a}_n \leq L + \varepsilon$ e prendendo il limite $M \leq L + \varepsilon$. Per l'arbitrarietà di ε , segue che $M \leq L$. In conclusione $L = M$.

Es 5.18 Se $\alpha_n := a_n^{1/n}$, allora $\alpha_n = 1/2$ se n è pari e $\alpha_n = 1/3$ se n è dispari e quindi $\{\alpha_n\}$ non converge (teorema ponte). D'altra parte $\{\alpha_k \mid k \geq n\} = \{1/2, 1/3\}$ il cui estremo superiore (massimo) è $1/2$ e quindi $\lim \alpha_n = 1/2$.

Es 5.19 NB: nel testo dell'esercizio, la specifica " $0 < \theta < M$ " va sostituita con " $M < \theta < 1$ ".

Se $1 < \theta < M$, dal Lemma 5.19–(i) (con a_n sostituito da $|a_n|$ e $\varepsilon = \theta - M > 0$) segue che esiste N tale che

$$|a_n|^{1/n} < \theta, \quad \forall n \geq N \quad \implies \quad |a_n| < \theta^n, \quad \forall n \geq N,$$

e dunque,

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{n=N}^{\infty} \theta^k = \frac{\theta^N}{1-\theta}.$$

Se $M > 1$, dal Lemma 5.19–(i), con a_n sostituito da $|a_n|$ e con $\alpha := (M+1)/2$, segue che, per ogni N esiste $n \geq N$ tale che $|a_n| > \alpha^n$. Possiamo, allora, definire $\{n_k\}$ iterativamente come segue: n_1 tale che $|a_{n_1}| > \alpha^{n_1}$, e dati $\alpha_1 < \dots < \alpha_{k-1}$, scegliamo $n_k > n_{k-1}$ tale che $|a_{n_k}| > \alpha^{n_k}$.

Es 5.20 Dimostriamo prima la (ii):

$$\begin{aligned} \binom{\alpha}{k+1} &:= \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdots (\alpha-k)}{(k+1)!} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)}{k!} \cdot \frac{\alpha-k}{k+1} \\ &=: \binom{\alpha}{k} \cdot \frac{\alpha-k}{k+1}. \end{aligned}$$

(i) Per induzione su $k \geq 0$. Per $k=0$ è vera, essendo $\binom{\alpha}{0} := 1$ per ogni α . Dal punto (i) segue poi che

$$\binom{-1}{k+1} = \binom{-1}{k} \cdot \frac{-1-k}{k+1} = (-1)^k \cdot (-1) = (-1)^{k+1}.$$

Es 5.21 NB: la relazione corretta da dimostrare in (ii) è: $\binom{-1/2}{k} = (-1)^k \alpha_k$.

$$(i) \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} = \frac{4(k+1)^2}{(2k+2)(2k+1)} = \frac{2k+2}{2k+1} \rightarrow 1, \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

(ii) Per definizione, si ha

$$\binom{-1/2}{0} = 1 = \alpha_0.$$

Assumiamo ora la relazione vera per k e dimostriamola per $k+1$. Dall'Es 5.20–(ii) con $\alpha = -1/2$, segue che

$$\binom{-1/2}{k+1} = \binom{-1/2}{k} \cdot \frac{-\frac{1}{2}-k}{k+1} = (-1)^{k+1} \alpha_k \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \stackrel{(i)}{=} \alpha_{k+1}.$$

Es 5.22 Poiché $\alpha_{k+1}/\alpha_k \rightarrow 1$ (Es 5.21–(i)), per l'Osservazione 5.21–(ii), il raggio di convergenza delle serie di potenze in **(g)**, **(h)**, **(i)** è 1. IL raggio di convergenza della serie di potenze in **(j)** è 1 per la formula di Cauchy–Hadamard. Dimostriamo ora le uguaglianze.

(g) $D \arcsen x = (1 - x^2)^{-1/2}$ e dunque dalla identità in **(f)** p. 197 e dall'Es 5.21 segue che

$$\begin{aligned} D \arcsen x &= (1 - x^2)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^{2k} \\ &= D \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} =: Df(x). \end{aligned}$$

Dunque $\arcsen x$ e $f(x)$ differiscono per una costante c , ma poiché $\arcsen 0 = 0 = f(0)$ si ha $f(x) = \arcsen x$ per ogni $|x| < 1$.

(h) segue immediatamente da **(g)**, essendo $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsen x$.

(i) si tratta come **(g)**, essendo $D \operatorname{arcsenh} x = (1 + x^2)^{-1/2}$ (naturalmente non ci sarà il $(-1)^k$).

(j) segue dall'espansione in serie di $\log(1 \pm x)$ (cfr **(d)** pag. 196).

Es 5.23 Dalla serie di Taylor del seno segue che

$$\sen x = x - \left(\left(\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} \right) + \dots + \left(\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} - \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) + \dots \right) \quad (*)$$

essendo l'uso delle parentesi lecito in quanto la serie è assolutamente convergente. Ora se $0 < x^2 < 20$, è facile verificare che per ogni $n \geq 1$,

$$\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} > \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

e quindi tutte le coppie di termini in $(*)$ sono strettamente positive. In particolare, si ha

$$\sen x < x - \frac{x^3}{6} \left(1 - \frac{x^2}{20} \right)$$

per ogni $0 < x < \sqrt{20}$. Se $x = 1/2$, si ha $\sen \frac{1}{2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{48} \frac{79}{80} < \frac{1}{2} - \frac{1}{50} = 0.48$.

Es 5.24 L'Osservazione 5.1 è valida parola per parola anche in $\mathbb{C}$.

Es 5.25 Dimostrazione identica al caso reale poiché anche in $\mathbb{C}$ vale la disuguaglianza triangolare (cfr. (1.82)).

Es 5.26 Segue dalla formula per la somma geometrica (che vale anche in $\mathbb{C}$; cfr. Es 1.70) e dal fatto che $|z|^n \rightarrow 0$ se e solo se $|z| < 1$ (come in $\mathbb{R}$).

Es 5.27 Per la formula di Cauchy-Hadamard, si ha:

$$(i) R^{-1} = \overline{\lim} \left(\frac{2^n}{n!} \right)^{1/n} = 0; \text{ quindi } R = +\infty.$$

$$(ii) R^{-1} = \overline{\lim} \left(2^{2n} \right)^{1/2n} = 2; \text{ quindi } R = 1/2.$$

(iii) $R^{-1} = \overline{\lim} 1^{1/n^2} = 1$; quindi $R = 1$.

Es 5.28 (i) Poiché la formula del binomio di Newton vale anche in $\mathbb{C}$, si può usare la (3.8) sostituendo x con $z = x + iy$ (e h in $\mathbb{R}$).

(ii)

$$\begin{aligned} De^{x+iy} &:= D(e^x e^{iy}) := D(e^x \cos y + i e^x \sin y) \\ &:= D(e^x \cos y) + i D(e^x \sin y) = e^x (\cos y + i \sin y) \\ &:= e^x e^{iy} =: e^{x+iy}. \end{aligned}$$

Es 5.29 NB: la convergenza è per $x \neq 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Dalle formule di Lagrange (4.111) segue che $\sum_{n=1}^N \sin nx$ e $\sum_{n=1}^N \cos nx$ sono limitate da $1/|\sin 2x|$ per ogni N e per ogni $x \neq 2\pi k$, ($k \in \mathbb{Z}$). Dunque, la convergenza per $x \neq 2\pi k$ segue dal criterio di convergenza di Abel–Dirichlet. La periodicità è ovvia.

Es 5.30 Se f è periodica e $C^1(\mathbb{R})$, allora, per $n = 0$, dal teorema fondamentale del calcolo segue che

$$(\widehat{f'})_0 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) dx = \frac{1}{2\pi} [f]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} (f(2\pi) - f(0)) = 0;$$

mentre, se $n \neq 0$, integrando per parti, si ottiene

$$(\widehat{f'})_n := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} [f e^{-inx}]_0^{2\pi} + in \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx = in \hat{f}_n.$$

Per $p \geq 1$, il risultato segue immediatamente per induzione (finita).

(ii) segue dal punto (i) e dalla Proposizione 5.38–(iv) (con $f^{(k)}$ al posto di f).

Es 5.31 NB: Assumere che $f \in C^2(\mathbb{R})$ (il risultato vale anche per $f \in C^1$ la dimostrazione è più difficile).

Poiché $f \in C^2(\mathbb{R})$ e periodica, dall'Es 5.30 e dalla Proposizione 5.38–(i) (applicata a f'') segue che

$$|\hat{f}_n| \leq \frac{c}{|n|^2}, \quad c := \sup_{\mathbb{R}} |f''|. \quad (*)$$

Dal Teorema 5.40 (essendo C^1 , il rapporto incrementale di f è limitato su $\mathbb{R}$) segue che, per ogni x ,

$$f(x) - S_N(x) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{N < |n| < M} \hat{f}_n e^{inx}. \quad (**)$$

Sia $\varepsilon > 0$ e sia N_0 tale che, per ogni $N \geq N_0$,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon}{2c}, \quad (***)$$

dove c è la costante in (*). Allora, per ogni $M > N \geq N_0$, si ha che

$$\left| \sum_{N < |n| < M} \hat{f}_n e^{inx} \right| \leq \sum_{N < |n| < M} |\hat{f}_n| \stackrel{(*)}{\leq} \sum_{N < |n| < M} \frac{c}{|n|^2} \leq \sum_{|n| > N} \frac{c}{|n|^2} = 2c \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{|n|^2} \stackrel{(***)}{\leq} \varepsilon$$

e prendendo il limite per $M \rightarrow +\infty$ la tale relazione si ottiene, per ogni $N \geq N_0$,

$$|f(x) - S_N(x)| \stackrel{(*)}{=} \lim_{M \rightarrow +\infty} \left| \sum_{N < |n| < M} \hat{f}_n e^{inx} \right| \leq \varepsilon.$$

Il risultato segue ora dal punto (iii) della Proposizione 5.38.

Capitolo 6

Es 6.1 “ A aperto” segue da (τ_1) .

3 è un punto isolato di E , quindi E non è aperto (vedi Esercizio 2.6).

1 è un punto isolato di E^c , quindi E^c non è aperto ossia E non è chiuso.

2 e 3 non sono punti interni di E ed A è aperto, quindi $\overset{\circ}{E} = A$.

2 non è isolato: $2 - 1/n \rightarrow 2$ e $2 - 1/n \in A$ per $n \geq 2$.

$([0, 2] \cup \{3\})^c = (-\infty, 0) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$ che è aperto (essendo unione di intervalli aperti).

Es 6.2 (τ_1) : $\emptyset \in \mathcal{A}$ per definizione e ovviamente $\mathbb{R} = \overset{\circ}{\mathbb{R}} \in \mathcal{A}$.

(τ_2) : Siano A_i aperti per ogni $i \in J$ e sia $x \in A := \cup_i A_i$. Questo vuol dire che esiste $j \in J$ tale che $x \in A_j = \overset{\circ}{A}_j \subseteq A$, ossia, $A \in \mathcal{A}$.

(τ_3) : Siano $A_i \in \mathcal{A}$ per $1 \leq i \leq n$, $A = \cap_i A_i$. Se $A = \emptyset$, $A \in \mathcal{A}$. Sia $A \neq \emptyset$ e $x \in A$. Questo vuol dire che $x \in A_i$ per ogni $1 \leq i \leq n$, ossia, per ogni i esiste $\delta_i > 0$ tale che $I_i := (x - \delta_i, x + \delta_i) \subseteq A_i$. Sia $\delta := \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$. Allora $\delta > 0$ e $(x - \delta, x + \delta) \subseteq A_i$ per ogni i , e quindi $(x - \delta, x + \delta) \subseteq A$, cioè, $A \in \mathcal{A}$.

Es 6.3 (i) è vera per definizione di insieme aperto.

(ii) e (iii) seguono immediatamente dalle definizioni.

(iv) Se $x \in \overset{\circ}{A}$ esiste $\delta > 0$ tale che $(x - \delta, x + \delta) \subseteq A$; $A \subseteq B$ implica che $(x - \delta, x + \delta) \subseteq B$, ossia, $x \in \overset{\circ}{B}$. Se C è un chiuso che contiene B contiene anche A e quindi $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

Es 6.4 Per l'Es 2.6, $\mathcal{J}E \cap \overset{\circ}{E} = \emptyset$ e quindi $\mathcal{J}E \subseteq (\overset{\circ}{E})^c$, il che implica che

$$\mathcal{J}E \setminus \overset{\circ}{E} = \mathcal{J}E \cap (\overset{\circ}{E})^c = \mathcal{J}E.$$

Dunque, dalla Proposizione 6.7-(ii), segue che

$$\partial E := \overline{E} \setminus \overset{\circ}{E} = (\mathcal{D}E \sqcup \mathcal{J}E) \setminus \overset{\circ}{E} = (\mathcal{D}E \setminus \overset{\circ}{E}) \sqcup (\mathcal{J}E \setminus \overset{\circ}{E}) = (\mathcal{D}E \setminus \overset{\circ}{E}) \sqcup \mathcal{J}E.$$

Es 6.5 $x \in (f^{-1}(A))^c \iff x \notin f^{-1}(A) \iff x \notin D_f$ oppure $x \in D_f$ e $f(x) \notin A \iff x \in f^{-1}(A^c)$; (qui $D_f := \text{dominio di } f$).

Es 6.6 Supponiamo che f sia continua su E e sia $A \in \mathcal{A}$ un aperto di $\mathbb{R}$ tale che $f^{-1}(A) \neq \emptyset$ (altrimenti il risultato è banalmente vero con $U = \emptyset$). Sia $x_0 \in f^{-1}(A)$ e sia $y_0 := f(x_0)$. Poiché A è un insieme aperto esiste un intervallo aperto $I_\varepsilon(y_0) = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon) \subseteq A$, $\varepsilon > 0$. Da (2.28) (con A sostituito da E) segue che l'insieme $I_\varepsilon(x_0) \cap E \subseteq f^{-1}(A)$. Se definiamo

$$U := \bigcup_{x_0 \in f^{-1}(A)} I_\varepsilon(x_0)$$

segue che $U \in \mathcal{A}$ e $U \cap E \subseteq f^{-1}(A)$. D'altra parte, ovviamente, $f^{-1}(A) \subseteq U \cap E$ poiché U contiene E (banalmente, $E \subseteq \bigcup_{x_0 \in f^{-1}(A)} \{x_0\}$).

Viceversa, assumiamo che per ogni aperto $A \subseteq \mathbb{R}$, esista $U \in \mathcal{A}$ tale che $f^{-1}(A) = U \cap E$. Sia $x_0 \in E$, sia $\varepsilon > 0$ e sia $y_0 := f(x_0)$. Essendo $I_\varepsilon(y_0)$ un aperto, esiste un aperto U tale che $f^{-1}(I_\varepsilon(y_0)) = E \cap U$. Chiaramente, $x_0 \in f^{-1}(I_\varepsilon(y_0)) \subseteq U$ e poiché U è aperto, esiste $\delta > 0$ tale che $I_\delta(x_0) \subseteq U$. Dunque, se $x \in E \cap I_\delta(x_0)$ si ha che $f(x) \in I_\varepsilon(y_0)$, il che significa che f è continua in x_0 .

Es 6.7 Siano, per $j \in \mathbb{N}$, $\{n^{(j)}\}$ le seguenti successioni: $n_k^{(j)} := 2k-1$ per $j \leq k$, e $n_k^{(j)} = 2k$, per $k \geq j+1$.

Le sottosuccessioni $(-1)^{n_k^{(j)}}$ sono diverse tra loro e poiché $(-1)^{n_k^{(j)}} = 1$ per ogni $k \geq j+1$, $(-1)^{n_k^{(j)}} \rightarrow 1$, per ogni j .

Es 6.8 (i): Poiché la funzione parte frazionaria è periodica di periodo 1 e n^2 è un numero naturale i valori possibili di a_n appartengono a $\{0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5\}$. Se $n_k = 5k$ si ha che $a_{n_k} = \{5k^2\} = 0$ e quindi $\liminf a_n = 0$.

Se $m_k := 5k+2$, $a_{m_k} = \{5k^2 + 2k + \frac{4}{5}\} = 4/5$ e quindi $\limsup a_n = 4/5$.

(ii): a_n è una funzione (di n) di periodo 6, calcolando i primi 6 valori per $0 \leq n \leq 5$ si trova che il massimo di tali valori è $a_1 = 1/(2\sqrt{2})$ e il minimo è $a_3 = -1/\sqrt{2}$; quindi prendendo $n_k = 1 + 6k$ e $m_k = 3 + 6k$ si vede che $\limsup a_n = 1/(2\sqrt{2})$ e $\liminf a_n = -1/\sqrt{2}$.

(iii): I termini della somma che definisce a_n sono pari se n è pari e dispari se n è dispari, quindi $a_{2n} = 0$ e $a_{2n+1} = \pi/2$, per cui $\limsup \sin a_n = \lim \sin a_{2n+1} = 1$ e $\liminf \sin a_n = \lim \sin a_{2n} = 0$.

(iv): Sia $b_n = \tanh((- \sqrt{2})^{n^2})$ e $c_n = \sin \frac{n\pi}{3}$. Si noti che n^2 è pari se e solo se n è pari. La successione b_{n_k} converge a 1 se e solo se n_k è definitivamente pari e converge a -1 se e solo se n_k è definitivamente dispari. La successione c_n è periodica di periodo 6 e assume i valori $c_1 = \sqrt{3}/2, c_2 = \sqrt{3}/2, c_3 = 0, c_4 = -\sqrt{3}/2, c_5 = -\sqrt{3}/2, c_6 = 0$. Quindi, $\limsup a_n = \sqrt{3}/2 = \lim a_{n_k}$ con $n_k = 2 + 6k$ e $\liminf a_n = -\sqrt{3}/2 = \lim a_{m_k}$ con $m_k = 3 + 6k$.

(v) La funzione $n \in \mathbb{N} \mapsto \{n/4\}$ è periodica di periodo 4 e

$$D := \{\{n/4\} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\},$$

dunque

$$0 \leq a_n \leq \frac{\frac{3}{4}n^2 + 1}{n(n+1)} \rightarrow \frac{3}{4}.$$

Quindi $\mathcal{L}_{\{a_n\}} \subseteq [0, \frac{3}{4}]$. Se $n_k = 4k$, $a_{n_k} = \frac{1}{n(n+1)} \rightarrow 0$; se $m_k = 3 + 4k$,

$$a_{m_k} = \frac{\frac{3}{4}n^2 + 1}{n(n+1)} \rightarrow \frac{3}{4}.$$

Quindi $\liminf a_n = 0$, $\limsup a_n = \frac{3}{4}$.

(vi) I valori di $\{n/2\}$ al variare di $n \in \mathbb{N}$ sono 0 e $1/2$; valori di $\{n/3\}$ al variare di $n \in \mathbb{N}$ sono 0, $1/3$ e $2/3$. Dunque $a_n \in D := \{0, 1/2, 1/3, 2/3, 5/6, 7/6\}$ e quindi $\mathcal{L}_{\{a_n\}} \subseteq D$. Il minimo limite si ottiene facilmente con la sottosuccessione a_{n_k} con $n_k = 6k$, essendo $a_{n_k} = 0$ per ogni k . Il massimo limite è $7/6$ che si ottiene con la sottosuccessione a_{m_k} con $m_k = 6k + 5$, essendo

$$a_{m_k} = \left\{\frac{m_k}{2}\right\} + \left\{\frac{m_k}{3}\right\} = \left\{3k + 2 + \frac{1}{2}\right\} + \left\{2k + 1 + \frac{2}{3}\right\} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}.$$

Es 6.9 $\{a_n | n \in \mathbb{N}\} = \{0, \pm\sqrt{2}/2, \pm 1\}$. D'altra parte se

$$\begin{aligned} n_k^{(1)} &:= 2\pi k, & n_k^{(2)} &:= \frac{\pi}{4} + 2\pi k, & n_k^{(3)} &:= -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \\ n_k^{(4)} &:= \frac{\pi}{2} + 2\pi k, & n_k^{(5)} &:= -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \end{aligned}$$

si ha che

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \sin a_{n_k^{(1)}} &= 0, & \lim_{k \rightarrow +\infty} \sin a_{n_k^{(2)}} &= \sqrt{2}/2, & \lim_{k \rightarrow +\infty} \sin a_{n_k^{(3)}} &= -\sqrt{2}/2, \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} \sin a_{n_k^{(4)}} &= 1, & \lim_{k \rightarrow +\infty} \sin a_{n_k^{(5)}} &= -1. \end{aligned}$$

Es 6.10 Sia $\{a_{j_k}\}$ una qualunque successione convergente a L e sia

$$b_k := \left\{\frac{j_k}{4}\right\}.$$

Allora, si ha che

$$b_k = a_{j_k} \left(1 + \frac{1}{j_k^2}\right) - \frac{1}{j_k^2} \rightarrow L$$

e quindi si deve avere

$$L \in D := \{\{n/4\} | n \in \mathbb{N}\} = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}.$$

Ma allora, $\mathcal{L}_{\{a_n\}} \subseteq D$. Abbiamo visto (Esercizio 6.8-(v)) che $0, 3/4 \in \mathcal{L}_{\{a_n\}}$ e se $\bar{n}_k := 1+4k$ e $\bar{m}_k = 2+k$, si ha che $\lim a_{\bar{n}_k} = 1/4$ e $\lim a_{\bar{m}_k} = 1/2$. Quindi $\mathcal{L}_{\{a_n\}} = D$.

Es 6.11 f è una funzione continua di periodo 1, dunque $a_{n+3} = a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; $\{a_n | n \in \mathbb{N}\} = \{1/4, 5/36\}$. Quindi, $\varlimsup a_n = 5/36 = \lim a_{1+3k}$; $\varliminf a_n = 1/4 = \lim a_{3k}$.

Es 6.12 NB: la tesi da dimostrare è che $\overline{\lim}(a_n b_n) \leq LM$ ma può valere la disuguaglianza stretta come mostra il seguente semplice esempio: $a_n = 2$ se n è pari e $1/2$ se n è dispari, e $b_n = 1/2$ se n è pari e 2 se n è dispari: chiaramente $a_n b_n = 1$ (e quindi $\overline{\lim}(a_n b_n) = 1$), ma $\lim a_n = 2 = \lim b_n$

Sia $\alpha := \overline{\lim}(a_n b_n)$. Per ogni $k \geq n$, $a_k b_k \leq \bar{a}_n \bar{b}_n$ e dunque

$$\sup\{a_k b_k \mid k \geq n\} \leq \bar{a}_n \bar{b}_n.$$

Prendendo il limite per n che tende a $+\infty$ si ha che

$$\alpha = \overline{\lim}(a_n b_n) \leq (\overline{\lim} a_n) \cdot (\overline{\lim} b_n) = LM.$$

Per il limite inferiore si ragiona in modo del tutto analogo.

Es 6.13 Assumiamo $L \in \mathbb{R}$ e sia $\varepsilon > 0$. Allora esiste m tale che,

$$L - \varepsilon \leq \frac{a_{j+1}}{a_j} \leq L + \varepsilon, \quad \forall j \geq m. \quad (*)$$

Poiché (come è facile verificare per induzione su k)

$$\frac{a_{m+k}}{a_m} = \prod_{j=1}^k \frac{a_{m+j}}{a_{m+j-1}}, \quad \forall k \geq 1,$$

Da (*) segue che

$$(L - \varepsilon)^k \leq \frac{a_{m+k}}{a_m} \leq (L + \varepsilon)^k, \quad \forall k \geq 1,$$

o, equivalentemente,

$$L - \varepsilon \leq \left(\frac{a_{m+k}}{a_m} \right)^{1/k} \leq L + \varepsilon, \quad \forall k \geq 1. \quad (**)$$

Poiché $a_m^{1/k} \rightarrow 1$, si ha che

$$\underline{\lim} \left(\frac{a_{m+k}}{a_m} \right)^{1/k} = \underline{\lim} a_k^{1/k}, \quad \overline{\lim} \left(\frac{a_{m+k}}{a_m} \right)^{1/k} = \overline{\lim} a_k^{1/k}.$$

Dunque, da (**) segue che

$$L - \varepsilon \leq \underline{\lim} a_k^{1/k} \leq \overline{\lim} a_k^{1/k} \leq L + \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε segue che $\underline{\lim} a_k^{1/k} = \overline{\lim} a_k^{1/k} = L$.

Nel caso $L = +\infty$, si dimostra in modo analogo che $\overline{\lim} a_k^{1/k} \geq \underline{\lim} a_k^{1/k} \geq M$ con $M > 0$ arbitrario e nel caso $L = -\infty$, si dimostra che $\underline{\lim} a_k^{1/k} \leq \limsup a_k^{1/k} \leq M$ con $M < 0$ arbitrario.

Es 6.14 Sia a_1 un punto qualunque di E e si consideri $E_1 := E \setminus \{a_1\}$: tale insieme è infinito; si scelga $a_2 \in E_1$ e si definisca $E_2 := E_1 \setminus \{a_2\}$, ...

Es 6.15 (i): Dato $\varepsilon > 0$ sia $N \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - b_m| < \varepsilon/2$, $\forall n, m \geq N$. Allora, se $n, m \geq N$, si ha

$$|a_n - a_m| = |a_n - b_N + b_N - a_m| \leq |a_n - b_N| + |b_N - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(ii): La riflessività segue dall'Esercizio 6.15; la simmetria è ovvia e la transitività segue immediatamente dalla disuguaglianza triangolare.

Es 6.16 Sia $\varepsilon > 0$. Allora, esiste δ tali che

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x, y \in E \text{ con } |x - y| < \delta. \quad (*)$$

Vogliamo dimostrare che

$$|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| < \varepsilon, \quad \forall x, y \in \bar{E} \text{ con } |x - y| < \delta. \quad (**)$$

Se $x, y \in E$; $(**)$ vale per $(*)$. Supponiamo che uno dei punti sia in $\bar{E}$ e l'altro in E : ad esempio, $x \in \bar{E}$ e $y \in E$. Allora, esiste $x_n \in E$ tale che $x_n \rightarrow x$. Sia N tale che $|x_n - x| < \delta$ per $n \geq N$ e quindi, se $|x - y| < \delta$,

$$|f(x_n) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq N, \quad \implies |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| = \lim |f(x_n) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Se $x, y \in \bar{E} \setminus E$ si ragiona allo stesso modo ($\exists x_n, y_n \in E$ t.c. $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$, etc.)

Es 6.18 (i) Se f non è limitata superiormente vicino a x_0 , allora $\bar{a}_n = +\infty$ ed esiste $x_n \rightarrow x_0$ tale che $\lim f(x_n) = +\infty$. Analogamente se f non è limitata inferiormente.

Assumiamo ora f limitata vicino a x_0 . Sia $\varepsilon > 0$ e sia $\alpha = \lim a_n = \lim \bar{a}_n$. Allora, esiste N tale che

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \bar{a}_n - \alpha < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq N. \quad (*)$$

Per definizione di $\bar{a}_n$, esiste $x_n \in U_n$ tale che

$$\bar{a}_n - \varepsilon < f(x_n) \leq \bar{a}_n, \quad (**)$$

e quindi

$$-\varepsilon \stackrel{(*)}{<} \bar{a}_n - \alpha - \frac{\varepsilon}{2} < f(x_n) - \alpha \stackrel{(**)}{\leq} \bar{a}_n - \alpha \stackrel{(*)}{<} \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad \forall n \geq N,$$

ossia, $\lim f(x_n) = \alpha$. Si noti che, per definizione di U_n , $x_n \rightarrow x_0$.

Per il limite inferiore si ragiona in modo analogo.

(ii) Se $L = \mathcal{L}_f$, esiste $x_n \rightarrow x_0$ tale che $f(x_n) \rightarrow L$. Poiché $f(x_n) \leq \bar{a}_n$ segue che $L \leq \lim_{x \rightarrow x_0} f$. Analogamente per il limite inferiore.

(iii) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f = L$, dal teorema ponte segue che per ogni $x_n \in A$ con $x_n \rightarrow x_0$, $\lim f(x_n) = L$ e quindi $\mathcal{L}_f = \{L\}$.

Viceversa, dal punto (i) segue che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f \in \mathcal{L}_f, \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f \in \mathcal{L}_f.$$

Quindi se $\mathcal{L}_f = \{L\}$, si ha che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f := \lim \underline{a}_n = \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f := \lim \bar{a}_n = L. \quad (\dagger)$$

Ora, sia $x_n \in A$ con $x_n \rightarrow x_0$. Sia $\varepsilon > 0$. Per $(\dagger)$, esiste m tale che

$$L - \varepsilon < \underline{a}_m \leq \bar{a}_m < L + \varepsilon.$$

Poiché $x_n \rightarrow x_0$, esiste N tale che $x_n \in U_m$ per ogni $n \geq N$. Dunque,

$$L - \varepsilon < \stackrel{(\dagger)}{\underline{a}_m} \leq f(x_n) \leq \stackrel{(\dagger)}{\bar{a}_m} < L + \varepsilon, \quad \forall n \geq N,$$

questo, per il teorema ponte, implica che $\lim_{x \rightarrow x_0} f = L$.

Es 6.19 Segue facilmente osservando che per ogni $n \exists m$ tale che $U_m \subseteq V_n$ e, viceversa, che per ogni $m \exists n$ tale che $V_n \subseteq U_m$. Infatti, da questa osservazione segue che,

$$\forall n, \exists m \text{ t.c. } \bar{a}_m \leq \bar{a}'_n,$$

$$\forall m, \exists n \text{ t.c. } \bar{a}'_n \leq \bar{a}_m,$$

e quindi i limiti (che esistono) di $\bar{a}_n$ e $\bar{a}'_n$ devono coincidere. Analogamente per il limite inferiore.

Es 6.20 (i) Poiché $-1 \leq \sin 1/x \leq 1$ per ogni $x \neq 0$, si ha che

$$-1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} \leq 1$$

D'altra parte, se $x_k := (\frac{\pi}{2} + 2k\pi)^{-1}$ e $y_k := (\frac{3}{2}\pi + 2k\pi)^{-1}$, si ha che $\sin 1/x_k = 1$ e $\sin 1/y_k = -1$ e quindi

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = -1.$$

(ii) Poiché $0 \leq \{x\} < 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha che

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \{x\} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \{x\} \leq 1$$

D'altra parte, se $x_k := k$ e $y_k := k - \frac{1}{k}$, si ha che $\{x_k\} = 0$ e $\{y_k\} = \{1 - \frac{1}{k}\} = 1 - \frac{1}{k} \rightarrow 1$ e quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \{x\} = 0, \quad \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \{x\} = 1.$$

(iii) $\mathcal{L}_f = \mathbb{R}^*$. Infatti, se $x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $f(x_k) = x_k \rightarrow +\infty$ e se $y_k = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, $f(y_k) = -y_k \rightarrow -\infty$. Quindi $\pm\infty \in \mathcal{L}_f$. Sia ora $L \in \mathbb{R}$. Dal grafico di $x \sin x$ segue che esistono infinite soluzioni $z_k \rightarrow +\infty$ di $x \sin x = L$ e quindi $L \in \mathcal{L}_f$, $\forall L \in \mathbb{R}$.

Es 6.21 In vista dell'Es 2.44 prendendo $x_n = 2\pi n - \frac{1}{n}$ e $y_n = 2\pi n + \frac{1}{n}$ segue che f non è uniformemente continua.

Es 6.22 Su $(0, 1]$ f è uniformemente continua se e solo se esiste il limite per $x \rightarrow 0$ ossia se e solo se $\alpha > 0$. Se $\alpha > 2$ $f \sim x^{\alpha-1}$ vicino a $+\infty$ e quindi non è uniformemente continua (crescendo più che linearmente). Se $0 < \alpha \leq 2$, f' è limitata e dunque f è lipschitziana in $[1, +\infty)$. In definitiva f è uniformemente continua su $(0, +\infty)$ se e solo se $\alpha \in (0, 2]$.

Es 6.23 La serie converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$ e infatti $\sum_{n=0}^{\infty} |2^{-n} \sin(2^n x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2$. Dato $\varepsilon > 0$, sia $N \in \mathbb{N}$ tale che $\sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon/4$. Questo implica che $\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} \sin(2^n x) \right| < \varepsilon/4$. La funzione $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \sin(2^n x)$ è continua su $\mathbb{R}$ e *periodica* di periodo (2π) . Quindi f è uniformemente continua su $\mathbb{R}$ ed esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/4$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $|x - y| < \delta$. Ne segue che, se $|x - y| < \delta$, si ha

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \sin(2^n x) - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \sin(2^n y) \right| &\leq |f(x) - f(y)| + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} \sin(2^n x) \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} \sin(2^n y) \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Es 6.24 NB: nel punto (iii) ignorare la frase “Dimostrare che $\overline{\mathcal{K}} = K$ ”.

(i) Se $x \in K := \cap K_n$, per ogni n , $x \in K_n = \cup_j E_j^n$ e quindi esiste j tale che $x \in E_j^n$; sia x_n uno degli estremi di E_j^n tale che $x_n \neq x$, allora, poichè $|E_j^n| = 1/3^n$ si ha che $|x - x_n| \leq 1/3^n \rightarrow 0$, per $n \rightarrow +\infty$, ossia, $x \in \mathcal{D}K$ e dunque $\mathcal{I}K = \emptyset$.

(ii) Per induzione, segue immediatamente che $a_{i+1}^n - b_i^n \geq 1/3^n$ per ogni $1 \leq i \leq 2^n - 1$ e dunque

$$z_i^n := b_i^n + \frac{1}{3^{n+1}} < a_{i+1}^n \implies z_i^n \notin K, \quad (\forall n \geq 1, 1 \leq i \leq 2^n - 1). \quad (*)$$

Ora, sia n tale che $1/3^n < y - x$. Allora, devono esistere $i \neq j$ tali che $x \in E_i^n$ e $y \in E_j^n$. Supponiamo $i < j$ (altrimenti scambiamo x e y). Allora $E_i^n < E_j^n$ e

$$x \leq b_i^n < b_i^n + \frac{1}{3^{n+1}} =: z_i^n \stackrel{(*)}{<} a_{i+1}^n \leq a_j^n \leq y,$$

e l'asserto è vero con $z = z_i^n$.

(iii) Consideriamo le famiglie di estremi sinistri e destri degli E_j^n , ossia, le famiglie

$$\mathcal{K}_-^n := \{a_j^n \mid n \geq 0 \text{ e } 1 \leq j \leq 2^n\}, \quad \mathcal{K}_+^n := \{b_j^n \mid n \geq 0 \text{ e } 1 \leq j \leq 2^n\}.$$

Per $n = 0$, $a_1^0 = 0$; per $n = 1$, $a_1^1 = 0$ e $a_2^1 = 2/3$; per $n = 2$,

$$a_1^2 = 0 = \frac{0}{3} + \frac{0}{9}, \quad a_2^2 = \frac{2}{9} = \frac{0}{3} + \frac{2}{9}, \quad a_3^2 = \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{0}{9}, \quad a_4^2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{9}.$$

Dimostriamo, in generale, che

$$\mathcal{K}_-^n := \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon_k}{3^k} \text{ t.c. } \varepsilon_k \in \{0, 2\} \right\}. \quad (**)$$

Per $n = 1$ e $n = 2$ lo abbiamo verificato sopra. Per induzione, assumiamo che $\mathcal{K}_-^n$ sia dato dalla (**). Per definizione, gli estremi sinistri a_j^{n+1} o coincidono con uno dei “precedenti” estremi sinistri a_j^n oppure sono dati da $a_j^n + 2/3^{n+1}$, il che equivale a dire che $\mathcal{K}_-^{n+1}$ è dato dalla formula (**) con n sostituito da $n + 1$.

Osserviamo, ora, che

$$b_j^n = a_j^n + \frac{1}{3^n} = a_j^n + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^k},$$

dunque la famiglia di estremi destri di E_j^n è data da

$$\mathcal{K}_+^n := \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon_k}{3^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^k} \text{ t.c. } \varepsilon_k \in \{0, 2\} \right\}. \quad (***)$$

Ora, ogni punto $x \in K$, appartiene a $K_n = \sqcup_j E_j^n$ per ogni n , ossia, per ogni n esiste un unico j tale che $x \in E_j^n$; dunque, esiste un unico a_j^n tale che $|x - a_j^n| \leq 1/3^n$. Se ne evince che, per ogni $x \in K$, esiste una unica successione j_n tale che $|x - a_{j_n}^n| \leq 1/3^n$ per ogni n . Ma per quanto visto sopra, questo equivale a dire che:

per ogni $x \in K$, $\exists!$ successione $\{\varepsilon_k\}$ con $\varepsilon_k \in \{0, 2\}$ e senza code infinite di 2 (che corrispondono agli estremi destri di E_j^n) tale che

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{3^k}. \quad (\dagger)$$

(iv) L'ultima affermazione in (iii) equivale a dire che K è in corrispondenza biunivoca con

$$\mathcal{E} := \{\text{successioni } \{\varepsilon_k\} \text{ con } \varepsilon_k \in \{0, 2\} \text{ senza code infinite di 2}\}.$$

Ovviamente, $\#\mathcal{E} = \#\mathcal{D}'_2$ dove $\mathcal{D}'_2$ denota le successioni di 0 o 1 senza code infinite di 1; ma tale insieme ha la cardinalità di $\mathbb{R}$ (cfr. Es 5.14 e Es 5.15) e quindi $K \cong \mathbb{R}$.

Es 6.25 Essendo E limitato, $\overline{E}$ è compatto.

Se f è uniformemente continua su E , esiste una unica estensione $\tilde{f}$ continua su $\overline{E}$ e, ovviamente, $f = \tilde{f}|_E$. Se $\tilde{f}$ è continua su $\overline{E}$, per il Teorema di Heine–Cantor è uniformemente continua su $\overline{E}$ e, in particolare $f := \tilde{f}|_E$ è uniformemente continua su E .

Es 6.26 $f(x) = \sin(1/x)$: se $x_n = (\frac{\pi}{2} + 2\pi n)^{-1}$ e $y_n = (2\pi n)^{-1}$ si ha che $x_n, y_n \rightarrow 0$ e $f(x_n) = 1$ e $f(y_n) = 0$ e quindi non può esistere alcuna estensione continua a $[0, 1]$ (che avrebbe limite per $x \rightarrow 0$).

Es 6.27 La negazione di uniforme continuità (cfr. (2.30)) è la seguente

$$\exists \varepsilon > 0 \mid \forall \delta > 0, \exists x, y \in E \text{ con } |x - y| < \delta \text{ e } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon. \quad (*)$$

Quindi se f non è uniformemente continua, prendendo $\delta = 1/n$ segue che esistono x_n e $y_n \in E$ tali che $|x_n - y_n| < 1/n \rightarrow 0$, tali che $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.

Viceversa, se esistono $\varepsilon > 0$ e $x_n, y_n \in E$ tali che $|x_n - y_n| \rightarrow 0$ ma $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$, chiaramente f non può soddisfare (2.30), poiché per n grandi si avrebbe $|x_n - y_n| < \varepsilon$ e si avrebbe una contraddizione.

Es 6.28 Sia $f \in C(\mathbb{R})$ di periodo $T > 0$. Ovviamente, f è anche periodica di periodo $2T$. Per il Teorema di Heine–Cantor f è uniformemente continua su $[0, 2T]$. Sia $\varepsilon > 0$ e sia $0 < \delta < T$ tale che $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ per ogni $x, y \in [0, 2T]$ con $|x - y| < \delta$. Siano ora $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $|x - y| < \delta$; possiamo supporre $x < y$. Essendo $\delta < T$, ci sono due casi: esiste $n \in \mathbb{Z}$ tale che $x, y \in [nT, (n+1)T]$; esiste $n \in \mathbb{Z}$ tale che $x < nT < y$. In entrambi i casi $x' := x - nT$ e $y' := y - nT$ appartengono a $[0, 2T]$ e $|x' - y'| < \delta$; quindi, per la periodicità di f , $|f(x) - f(y)| = |f(x') - f(y')| < \varepsilon$.

Es 6.29 Sia $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$. Sia $\varepsilon > 0$ e sia $a \in E$, $a > 0$ tale che $|f(x) - L| < \varepsilon/4$ per ogni $x \in E \cap [a, +\infty)$. Si osservi che se $x, y \in E$ e $x, y \geq a$ allora

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - L| + |L - f(y)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon/2.$$

Essendo E limitato inferiormente e chiuso, $E \cap (-\infty, a]$ è compatto e quindi f è uniformemente continua su $E \cap (-\infty, a]$, per cui esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$ per ogni $x, y \in E \cap (-\infty, a]$ e $|x - y| < \delta$. Siano $x, y \in E$ con $x < y$. Vi sono tre casi: (a) $y \leq a$; (b) $x \geq a$; (c) $x < a \leq y$. Nel caso (a), $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2 < \varepsilon$. Nel caso (b), $0 \leq a - x \leq y - x < \delta$ e quindi $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Nel caso (c), $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$.

Es 6.30 Dalla definizione di asintoto segue che $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tali che $g(x) := f(x) - ax \rightarrow b$ per $x \rightarrow +\infty$. Consideriamo prima il caso $a = 0$, ossia, il caso in cui esiste $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = b \in \mathbb{R}$.

Sia $\varepsilon > 0$ e sia $M > 1$ tale che

$$|f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \geq M - 1. \quad (*)$$

Per Heine–Cantor, f è uniformemente continua su $[c, M]$. Quindi, $\exists 0 < \delta < 1$ tale che

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in [c, M] \text{ con } |x - y| < \delta. \quad (**)$$

Dimostriamo che vale (2.30) con $A := [c, +\infty)$. Siano dunque $x, y \in A$ con $|x - y| < \delta$. Se $x, y \in [c, M]$, (2.30) vale per (**). Se $x, y \geq M$, allora, per (*) si ha

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - b| + |f(y) - b| \stackrel{(*)}{<} \varepsilon.$$

Rimane il caso in cui $x < M \leq y$ (o viceversa, scambiando x e y). Ma essendo $\delta < 1$ si ha che

$$x = x - y + y > -\delta + y \geq -\delta + M > M - 1,$$

e quindi $x, y \geq M - 1$ e si può di nuovo usare la (*) per concludere, come sopra, che $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Se $a \neq 0$, per quanto dimostrato, la funzione $g(x) := f(x) - ax$ è uniformemente continua su $[c, +\infty)$ e quindi $f(x) = g(x) + ax$ è uniformemente continua su $[c, +\infty)$ essendo la somma di due funzioni uniformemente continue su $[c, +\infty)$.

Es 6.31 Supponiamo, per assurdo, che g non sia continua su D . Allora, deve esistere $y_0 \in D \cap \mathcal{D}D$ e una successione $\{y_n\}$ in D con $\lim y_n = y_0$ tale che $x_n := g(y_n) \in K$ non converge a $x_0 := g(y_0)$. Quindi esisterebbe $\varepsilon > 0$ tale che, per infiniti n , $|x_n - x_0| \geq \varepsilon$, il che implica che esiste una sottosuccessione x_{n_j} tale che

$$|x_{n_j} - x_0| \geq \varepsilon. \quad (*)$$

Poiché K è compatto, esisterebbe una ulteriore sottosuccessione $x_{m_k} := x_{n_{j_k}}$ convergente ad un $\bar{x} \in K$ e, per (*), $|\bar{x} - x_0| \geq \varepsilon > 0$. Ma poiché f è continua, $f(\bar{x}) = \lim f(x_{m_k}) = \lim y_{m_k} = \lim y_n = y_0 = f(x_0)$, il che contraddice l'iniettività di f .

Es 6.32 Ovviamente φ è continua (su $\mathbb{R}$) e $\varphi(x) \geq e^{-x} > 0$ per $x \geq 0$. Se $x_k := 2\pi k$, $\varphi(x_k) = e^{-2\pi k} \rightarrow 0$, quindi $\inf_J \varphi = 0$. Se $y_k := \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $\varphi(y_k) = e^{-y_k} + y_k \rightarrow +\infty$ e quindi $\sup_J \varphi = +\infty$. Infine, dal teorema dei valori intermedi per funzioni continue segue che $\varphi(J) = (0, +\infty)$.

Es 6.33 (i) Poniamo $I_5 := I_1$ e $I_6 := I_0$ e osserviamo che è sufficiente trovare, per $1 \leq k \leq 5$, funzioni continue $\varphi_k : I_k \xrightarrow{\text{su}} I_{k+1}$ (ad esempio, $f_{kk} = \text{id}$, $f_{13} = \varphi_2 \circ \varphi_1$, $f_{43} = \varphi_2 \circ \varphi_1 \circ \varphi_4$, $f_{20} = \varphi_5 \circ \varphi_4 \circ \varphi_3 \circ \varphi_2$). Tali funzioni continue φ_k possono essere scelte come segue:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < x \leq 1/2 \\ 2x - 1 & \text{se } 1/2 \leq x < 1 \end{cases}, \quad \varphi_2(x) = \frac{x}{1-x}, \quad \varphi_3 = \varphi$$

$$\varphi_4(x) = \frac{x}{1+x}, \quad \varphi_5 = \begin{cases} 3x & \text{se } 0 < x < 1/3 \\ -3x + 2 & \text{se } 1/3 \leq x \leq 2/3 \\ 0 & \text{se } 2/3 \leq x < 1 \end{cases}$$

dove φ è la funzione definita nell'Es 6.32.

(ii) Se f è una funzione continua, $f(I_0)$ è un intervallo compatto (Osservazione 6.31–(ii)) e quindi, essendo gli intervalli I_j per $j > 0$ non compatti $f(I_0) \neq I_j$, per ogni $f \in C(I_0)$ e per ogni $j > 0$.

Capitolo 7

Es 7.1 Siano

$$M := \sup_A f, \quad m := \inf_A f, \quad \alpha := \sup_{x,y \in A} |f(x) - f(y)| := \sup\{|f(x) - f(y)| \text{ t.c. } x, y \in A\}.$$

Vogliamo dimostrare che $\alpha = M - m$. Se f non è limitata su A il risultato è banalmente vero (con la convenzione che in tal caso $M - m = +\infty$). Assumiamo ora f limitata su A . Allora, per ogni $x, y \in A$ si ha

$$m - M \leq f(x) - f(y) \leq M - m, \quad \forall x, y \in A \iff |f(x) - f(y)| \leq M - m, \quad \forall x, y \in A.$$

da cui segue che $\alpha \leq M - m$. D'altra parte, per ogni $x, y \in A$,

$$f(x) - f(y) \leq |f(x) - f(y)| \leq \sup_{x,y \in A} |f(x) - f(y)| =: \alpha,$$

da cui $M - f(y) \leq \alpha$, o anche $f(y) \geq M - \alpha$, che implica $m \geq M - \alpha$, ossia, $M - m \leq \alpha$. In conclusione, $\alpha = M - m$.

Es 7.2 Per ogni n , $K \subseteq K_n$ e K_n è unione disgiunta di 2^n intervalli chiusi $E_j^n = [a_j^n, b_j^n]$, con $1 \leq j \leq 2^n$, di lunghezza $1/3^n$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia n tale che $(2/3)^n < \varepsilon/2$. Sia ora,

$$\tilde{E}_j^n = \bigcup_{1 \leq j \leq 2^n} (a_j^n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, b_j^n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}})$$

Allora

$$K \subseteq K_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{2^n} \tilde{E}_j^n,$$

ed, inoltre,

$$\sum_{j=1}^{2^n} |\tilde{E}_j^n| = \sum_{j=1}^{2^n} (b_j^n - a_j^n) + 2 \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} = \sum_{j=1}^{2^n} \frac{1}{3^n} + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Es 7.3 Un insieme aperto non vuoto contiene sempre un intervallo $[a, b]$ con $a < b$. Sia $\varepsilon < b - a$ e siano, per assurdo, I_i come nella Definizione 7.9. Siano I_{i_k} tutti gli intervalli della famiglia $\{I_i\}$ che hanno intersezione non nulla con $[a, b]$. Chiaramente, $\{I_{i_k}\}$ forma un ricoprimento aperto di $[a, b]$ e quindi dal Teorema di Heine–Borel segue che esiste una sottofamiglia finita che ricopre $[a, b]$: quindi esistono $J_1, \dots, J_N$ intervalli della famiglia $\{I_i\}$

tali che $\bigcup_{i=1}^N J_i \supseteq [a, b]$ e $\sum |J_i| < \varepsilon$. Ma $E := \bigcup_{i=1}^N J_i$ è un intervallo aperto e limitato che contiene $[a, b]$ la cui lunghezza non può eccedere la somma delle lunghezze degli J_i e quindi si avrebbe $(b - a) < \varepsilon$ che è in contraddizione con la scelta di ε .

Es 7.4 Denotiamo con $\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}$ la famiglia di tutti i polinomi non costanti su $\mathbb{C}$ a coefficienti in $\mathbb{Z}$, e con $\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}^n$ la famiglia dei polinomi di grado $n \geq 1$, $P = a_0 + \cdots + a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$, con $a_k \in \mathbb{Z}$ e $|a_k| \leq n$. Allora, $\#\mathcal{P}_n \leq (2n+1)^{n+1} < \infty$ e $\cup_n \mathcal{P}_{\mathbb{Z}}^n = \mathcal{P}_{\mathbb{Z}}$. Quindi $\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}$ è numerabile. Inoltre, per il teorema fondamentale dell'algebra, se $P \in \mathcal{P}_{\mathbb{Z}}^n$, $P(z) = 0$ ha n soluzioni (contate con molteplicità). Quindi i numeri algebrici sono numerabili.