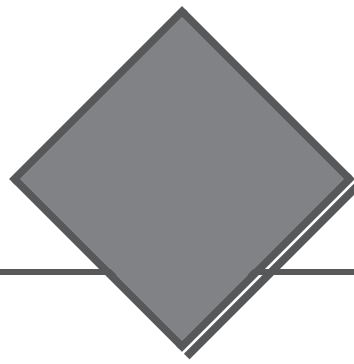


Soluzioni degli esercizi



1 Esercizi del Capitolo 1: Nozioni preliminari

Esercizio 1.1 $A \cap B = \{2, 4, 6\}$; $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $B \setminus C = \{2, 4, 8\}$; $C \setminus B = \{3, 7\}$; $A \times C = \{(1, 3), (1, 6), (1, 7), (2, 3), (2, 6), (2, 7), (4, 3), (4, 6), (4, 7), (5, 3), (5, 6), (5, 7), (6, 3), (6, 6), (6, 7)\}$; $(A \cup B) \cap C = \{6\}$.

Esercizio 1.2 $A \cap B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $A \setminus B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $\mathbb{N} \setminus B$ è l'insieme dei naturali pari, $\mathbb{N} \setminus (A \cap B) = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 14, \dots\}$.

Esercizio 1.3 $A \times B = \{(1, 2); (1, 4); (1, 6); (5, 2); (5, 4); (5, 6); (6, 2); (6, 4); (6, 6); (7, 2); (7, 4); (7, 6)\}$; $B \times A = \{(2, 1); (4, 1); (6, 1); (2, 5); (4, 5); (6, 5); (2, 6); (4, 6); (6, 6); (2, 7); (4, 7); (6, 7)\}$.

Esercizio 1.5 12.

Esercizio 1.9 Se f è bigettiva, basta prendere $g_1 = g_2 = f^{-1}$ per ottenere le funzioni cercate. Se esistono $g_1, g_2 : B \rightarrow A$ tali che $f \circ g_1 = \text{id}_B$ e $g_2 \circ f = \text{id}_A$, la prima uguaglianza implica che f è surgettiva, la seconda che f è iniettiva e quindi f è bigettiva. Inoltre $g_1 = \text{id}_A \circ g_1 = (g_2 \circ f) \circ g_1 = g_2 \circ (f \circ g_1) = g_2 \circ \text{id}_B = g_2$, il che prova che $g_1 = g_2$.

Esercizio 1.10 Se $a_1 \in A_1$, allora $a_1 \in A_1 \cup A_2$, quindi $f(a_1) \in f(A_1 \cup A_2)$; lo stesso accade per ogni $a_2 \in A_2$ e quindi $f(A_1) \cup f(A_2) \subseteq f(A_1 \cup A_2)$. Se $b \in f(A_1 \cup A_2)$, allora esiste $a \in A_1 \cup A_2$ tale che $b = f(a)$; se $a \in A_1$, allora $b \in f(A_1)$, se $a \in A_2$, allora $b \in f(A_2)$, quindi $b \in f(A_1) \cup f(A_2)$, da cui $f(A_1 \cup A_2) \subseteq f(A_1) \cup f(A_2)$, il che prova l'uguaglianza. Se $a \in A_1 \cap A_2$, allora $a \in A_1 - 1$ e $a \in A_2$, quindi $f(a) \in f(A_1)$ e $f(a) \in f(A_2)$, da cui $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, se $A_1 = (-\infty, 0]$ e $A_2 = [0, +\infty)$ allora $A_1 \cap A_2 = \{0\}$ e $f(A_1 \cap A_2) = \{0\}$, mentre $f(A_1) = f(A_2) = [0, +\infty)$ e quindi $f(A_1) \cap f(A_2) = [0, +\infty) \neq f(A_1 \cap A_2)$.

Esercizio 1.11 Dall'esercizio precedente sappiamo che $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$. Preso $b \in f(A_1) \cap f(A_2)$, esistono $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$ tali che $b = f(a_1)$ e $b = f(a_2)$. Essendo f iniettiva, poiché $f(a_1) = f(a_2)$ si ha $a_1 = a_2$ e quindi $a_1 \in A_1 \cap A_2$, per cui $b \in f(A_1 \cap A_2)$, il che prova che se f è iniettiva vale anche l'inclusione $f(A_1) \cap f(A_2) \subseteq f(A_1 \cap A_2)$ e quindi l'uguaglianza $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

Esercizio 1.12 Se $b \in f(A_1) \setminus f(A_2)$, poiché $b \in f(A_1)$ esiste $a_1 \in A_1$ tale che $b = f(a_1)$. Inoltre $a_1 \notin A_2$, perché altrimenti si avrebbe $b \in f(A_2)$; pertanto $b = f(a_1)$ con $a_1 \in A_1 \setminus A_2$. Se $A = B = \mathbb{R}, A_1 = [-2, +\infty), A_2 = (-\infty, -1], f(x) = x^2$ allora $f(A_1) = [0, +\infty), f(A_2) = [1, +\infty), f(A_1) \setminus f(A_2) = [0, 1)$ e $f(A_1 \setminus A_2) = [0, +\infty)$.

Esercizio 1.14 Dato $a_1 \in A_1$, allora $f(a_1) \in f(A_1)$ e quindi per definizione $a_1 \in f^{-1}(f(A_1))$. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, preso $A_1 = \{2\}$ abbiamo $f(A_1) = \{4\}$ e $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1)) = \{-2, 2\}$.

Esercizio 1.15 Dato $a_1 \in f^{-1}(B_1)$, allora $f(a_1) \in B_1$, quindi per definizione $f(f^{-1}(B_1)) \subseteq B_1$. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, preso $B_1 = \{-1\}$ abbiamo $f^{-1}(B_1) = \emptyset$ e $\emptyset = f(f^{-1}(B_1)) \subset B_1$.

Esercizio 1.16 È iniettivo se e solo se è surgettivo se e solo se $a = 0$ e $b \neq 0$, indipendentemente dai valori di c .

Esercizio 1.17 Se $f(x_1) = f(x_2)$ con $x_1 \neq x_2$ allora

$$g \circ f(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = g \circ f(x_2)$$

e quindi $g \circ f$ non sarebbe iniettiva. Se $A = B = C = \mathbb{R}, f(x) = e^x, g(x) = x^2$ hai che f e $g \circ f$ sono iniettive, mentre g non lo è.

Esercizio 1.18 Poiché $g \circ f$ è surgettiva, dato $c \in C$ esiste $a \in A$ tale che $c = (g \circ f)(a) = g(f(a))$; basta quindi prendere $b = f(a)$ per provare che g è surgettiva. Consideriamo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ data da $g(x) = |x|$; allora $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ è data da $(g \circ f)(x) = |x^2| = x^2$ è surgettiva, così come g , mentre f non lo è.

Esercizio 1.19 Non sono iniettive $b)$ ed $e)$, in quanto in entrambi i casi $f(1) = f(-1)$; le altre tre sono iniettive.

Esercizio 1.20

- (a) $f \circ g(x) = 32x^6 - 6 - x^3 + 28$, $g \circ f(x) = 32x^6 - 144x^5 + 264x^4 - 252x^3 + 132x^2 - 36x + 1$; per entrambe il dominio è $\mathbb{R}$;
- (b) $f \circ g(x) = x^6 - 3x^5 - 3x^4 + 11x^3 + 6x^2 - 12x - 12$, $g \circ f(x) = x^6 - 9x^3 + 22$; per entrambe il dominio è $\mathbb{R}$;
- (c) $f \circ g(x) = 9x^6 - 18x^4 + 9x^2 - 2$, $g \circ f(x) = 3x^6 - 18x^4 + 33x^2 - 18$; per entrambe il dominio è $\mathbb{R}$;
- (d) $f \circ g(x) = \frac{1}{x^2}$, $g \circ f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 = f \circ g(x)$; per entrambe il dominio è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- (e) $f \circ g(x) = \frac{1}{x^2 - 6x + 10}$, $g \circ f(x) = -\frac{3x^2 + 2}{x^2 + 1}$; per entrambe il dominio è $\mathbb{R}$;
- (f) $f \circ g(x) = \frac{1}{x^4 + 4x^2 + 4}$, $g \circ f(x) = \frac{2x^4 + 1}{x^4}$; il dominio di $f \circ g$ è $\mathbb{R}$, quello di $g \circ f$ è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- (g) $f \circ g(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$, $g \circ f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$; il dominio di $f \circ g$ è $(-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$, quello di $g \circ f$ è $[0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Esercizio 1.21

- (a) È falso perché se $x = 2$ si ha che $x \in \mathbb{N}$ e $P(2)$ è falsa perché $2 + 2 = 4 < 10$.
- (b) È vero perché se $x = 9$ si ha che $x \in \mathbb{N}$ e $P(9)$ è vera perché $9 + 2 = 11 > 10$.
- (c) Ad esempio $A = \{9; 12; 17\}$.
- (d) Ad esempio $B = \{2; 6; 11\}$.

Esercizio 1.23 Tutti i bambini delle scuole materne non credono a Babbo Natale.

Esercizio 1.24 Domani piove e non dormo fino a tardi.

Esercizio 1.25 Per la prima affermazione ogni giorno della settimana devi controllare che Leonardo non stia sveglio tutto il giorno, cioè devi trovare almeno un minuto in cui dorme. Per la seconda devi controllare che ogni giorno della settimana ci sia almeno un minuto in cui Jacopo non studia. Per l'ultima devi controllare se c'è almeno un giorno in cui Niccolò si sveglia presto ma non ha fame prima di mezzogiorno: in caso affermativo la frase proposta è falsa, altrimenti è vera.

Esercizio 1.26 Sono vere $b)$, $c)$, $f)$. La risposta a 1. è $b)$, la risposta a 2. è $f)$.

Esercizio 1.30

- (a) È falso: basta considerare la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2$ per ogni x reale. Presi $x_1 = -2$ e $x_2 = 1$ si ha $x_1 < x_2$ mentre $f(x_1) = (-2)^2 = 4 < 1 = f(x_2)$.
- (b) La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = -x$ soddisfa la condizione richiesta, infatti $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) = -x_1 > -x_2 = f(x_2)$.

Esercizio 1.34 Prima di tutto osserviamo che la restrizione della somma e del prodotto definiti sui numeri reali a $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ mandano questo insieme in sé: infatti dati $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ si ha che

$$(a + b\sqrt{3}) + (c + d\sqrt{3}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}),$$

$$(a + b\sqrt{3})(c + d\sqrt{3}) = (ac + 3bd) + (ad + bd)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}).$$

La restrizione della somma e del prodotto a $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ sono associative e commutative e vale la proprietà distributiva perché vale su $\mathbb{R}$ che contiene $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Inoltre $0 = 0 + 0\sqrt{3}$, $1 = 1 + 0\sqrt{3}$ appartengono a $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ svolgono il ruolo di elemento neutro della somma e del prodotto rispettivamente; $-a + (-b)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ è l'opposto di $a + b\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ e l'inverso di $a + b\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \setminus \{0\}$ è dato da $\frac{a}{a^2 + 3b^2} + \frac{-b}{a^2 + 3b^2}\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ perché $-a$, $-b$, $\frac{a}{a^2 + 3b^2}$ e $\frac{-b}{a^2 + 3b^2}$ sono numeri razionali se a e b lo sono (e nel terzo e quarto caso a e b non sono entrambi nulli). L'insieme $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ è quindi dotato di opposto per ogni elemento e di inverso per ogni elemento non nullo ed è pertanto un campo.

2 Esercizi del Capitolo 2: Vettori geometrici

Esercizio 2.6 Poiché $\vec{i} = 1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j}$ si ha $F_B(\vec{i}) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$; analogamente $\vec{j} = 0 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j}$ implica $F_B(\vec{j}) = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$.

Esercizio 2.7 $F_B(\overrightarrow{OD_1}) = \begin{vmatrix} -1 \\ 5 \end{vmatrix}$; $F_B(\overrightarrow{OD_2}) = \begin{vmatrix} 7 \\ 7 \end{vmatrix}$.

Esercizio 2.8 Grazie alle proprietà della somma e del prodotto per scalare abbiamo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD_1} &= \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = (\vec{i} - 4\vec{j}) + 2(-2\vec{i} - \vec{j}) + 3(\vec{i} + 2\vec{j}) \\ &= \vec{i} - 4\vec{i} + 3\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{j} + 6\vec{j} = (1 - 4 + 3)\vec{i} + (-4 - 2 + 6)\vec{j} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} = \overrightarrow{OO}.\end{aligned}$$

Ragionando nello stesso modo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD_2} &= \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = (\vec{i} - 4\vec{j}) - 2(-2\vec{i} - \vec{j}) + (\vec{i} + 2\vec{j}) \\ &= \vec{i} + 4\vec{i} + \vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{j} + 2\vec{j} = 6\vec{i} + 0 \cdot \vec{j} = 6\vec{i}\end{aligned}$$

è un multiplo di $\vec{i}$.

Esercizio 2.9 Siccome

$$\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + a\overrightarrow{OC} = 3(\vec{i} + 7\vec{j}) + (3\vec{i} + 5\vec{j}) + a(2\vec{i} - \vec{j}) = (6 + 2a)\vec{i} + (26a)\vec{j},$$

tale vettore è un multiplo di $\vec{j}$ se e solo se $6 + 2a = 0$, ovvero $a = -3$.

Esercizio 2.10 $a = 20$.

Esercizio 2.11 Se $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ fossero proporzionali, dovrebbe esistere $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\overrightarrow{OB} = \alpha \overrightarrow{OA}$, cioè $-2\vec{i} + \vec{j} = \alpha(2\vec{i} + 3\vec{j})$, il che implica $\alpha = -1$ e $3\alpha = 1$, il che è chiaramente impossibile. Inol-

tre l'uguaglianza $\overrightarrow{OC} = \vec{i} + \vec{j} = x_1(2\vec{i} + 3\vec{j}) + x_2(-2\vec{i} + \vec{j})$ equivale al sistema $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 1, \\ 3x_1 + x_2 = 1, \end{cases}$

la cui soluzione è $x_1 = \frac{3}{8}$, $x_2 = -\frac{1}{8}$ e pertanto $F_{B'}(\overrightarrow{OC}) = \begin{vmatrix} 3/8 \\ -1/8 \end{vmatrix}$.

Esercizio 2.12 Non sono proporzionali per $a \neq -2$. Per questi valori di a si ha

$$F_{B_a}(\overrightarrow{OC}) = \begin{vmatrix} \frac{3}{a+2} \\ \frac{a-4}{a+2} \end{vmatrix}.$$

Esercizio 2.13 $F_B(\overrightarrow{OD_1}) = F_B(\overrightarrow{OA}) - F_B(\overrightarrow{OB}) - 2F_B(\overrightarrow{OC}) = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{vmatrix};$

analogamente si trova $F_B(\overrightarrow{OD_1}) = \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{vmatrix}$.

Esercizio 2.14 Una base di $\mathcal{V}_O^3$ deve contenere 3 vettori non complanari, basta quindi verificare che i tre vettori assegnati non appartengono allo stesso piano. Se ne esistesse uno che li contiene tutti e tre, dato che $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ sono non nulli, dovremmo poter scrivere $\overrightarrow{OC}$ come somma di un multiplo di $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, esisterebbero quindi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che $x_1\overrightarrow{OA} + x_2\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$, ovvero $x_1(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) + x_2(2\vec{j} + \vec{j} - \vec{k}) = -4\vec{i} - 3\vec{j}$. Questa uguaglianza equivale al sistema di equazioni $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -4, \\ x_1 + x_2 = -3, \\ -x_1 - x_2 = 0; \end{cases}$ essendo tale sistema impossibile, i tre vettori assegnati sono una base di $\mathcal{V}_O^3$.

Esercizio 2.15 $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$, quindi $\overrightarrow{OC}$ appartiene al piano generato da $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

Esercizio 2.16 $a = 4$.

4 Soluzioni degli esercizi

Esercizio 2.18 Le due rette si intersecano nel punto $\begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{vmatrix}$, che si ottiene per $t = 1$ e $t' = -2$.

Esercizio 2.19 Il sistema $\begin{cases} 2t - 1 = 1 - t' \\ 2t + 1 = 3 - t' \\ 4t - 1 = 3 - 2t' \end{cases}$ ha le infinite soluzioni $t' = 2 - 2t$, quindi le rette sono coincidenti.

Esercizio 2.20 Il piano π ha equazione cartesiana $x - y + z = 0$; sostituendo le equazioni parametriche della retta trovi $t - 2 - (3t - 1) + 2t + 1 = 0$ che è un'identità, quindi la retta giace nel piano.

Esercizio 2.22 Il piano π ha equazione cartesiana $3x - 3y + z = 0$; sostituendo le coordinate dei due punti ottieni nel primo caso $3 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 3 = 0$ mentre nel secondo $3 \cdot 1 - 3(-2) + 3 \neq 0$; quindi il primo punto appartiene a π , mentre il secondo no.

Esercizio 2.23 $a = 15$.

Esercizio 2.26 La retta r_a ha equazione cartesiana $y + 1 = a(x - 2)$ ovvero $y = ax = 2a - 1$, pertanto $O \in r_a$ se e solo se $a = -\frac{1}{2}$.

Esercizio 2.27 La retta r ha equazione parametrica $\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = e + 2et, \\ z = \sqrt{2} + (\sqrt{2} + \sqrt{3})t; \end{cases}$ quindi $\begin{vmatrix} 3 \\ -e \\ -\sqrt{3} \end{vmatrix}$ sta in r perché corrisponde al valore $t = -1$.

Esercizio 2.29 Il sistema $\begin{cases} 1 + 3t = -1 + t' \\ 2 + t = 1 + 2t' \end{cases}$ ha soluzione $t = -\frac{3}{5}$, $t' = \frac{1}{5}$ che corrisponde al punto $\begin{vmatrix} -\frac{4}{7} \\ \frac{5}{5} \end{vmatrix}$.

Esercizio 2.30 La prima retta ha equazione cartesiana $y = 1$, la seconda $y = 2x - 2$; il punto di intersezione è $\begin{vmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{vmatrix}$.

Esercizio 2.32 Le equazioni parametriche della prima e della seconda retta sono rispettivamente $\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = t, \\ z = 4 - 3t; \end{cases}$ e $\begin{cases} x = t, \\ y = t, \\ z = -3 + 4t; \end{cases}$ l'intersezione è il punto $\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$.

Esercizio 2.33 Le rette r e s_a si intersecano quando $a \neq -1/3$, e in tal caso il punto di intersezione è $\begin{vmatrix} (6a - 7)/(3a + 1) \\ (5a + 7)/(3a + 1) \end{vmatrix}$.

3 Esercizi del Capitolo 3: L'eliminazione di Gauss

Esercizio 3.5 $x = 5, y = 1, z = 2; x_1 = 9, x_2 = 3, x_3 = -1$.

Esercizio 3.6 $x = -2, y = 4, z = 1, w = 3; x_1 = \frac{75}{8}, x_2 = \frac{3}{8}, x_3 = 4, x_4 = 1$.

Esercizio 3.7 $x = 1, y = 2; x_1 = 3, x_2 = 7; \alpha = -3, \beta = 4$.

Esercizio 3.8 $x = 0, y = 1, z = 2$; non ammette soluzioni.

Esercizio 3.9 $x = t, y = 3 - t, z = 2t - 1; x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 4$.

Esercizio 3.10 Il primo sistema ammette come unica soluzione $\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}$. Il secondo si-

stema ammette come unica soluzione $\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$. Il terzo sistema ammette come unica soluzione

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4/5 \\ -1/2 \\ 3/4 \end{vmatrix}.$$

Esercizio 3.11 $x = 1, y = 0, z = 3, w = 1$; non ammette soluzioni.

Esercizio 3.12 Il primo sistema ammette come unica soluzione $\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1/18 \\ 1/18 \\ -2/9 \\ 0 \end{vmatrix}$. Il secon-

do sistema ammette come unica soluzione $\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4/5 \\ -1/2 \\ 3/4 \end{vmatrix}$. Il terzo sistema ammette come unica

soluzione $\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/3 \\ 1/2 \\ 1/6 \\ 0 \end{vmatrix}.$

Esercizio 3.13 $x = \frac{6}{5}, y = -\frac{4}{5}, z = -\frac{108}{25}, t = 1; x = \frac{13}{12}, y = -\frac{11}{12}, z = -\frac{157}{36}, t = \frac{11}{12};$
 $x = \frac{9}{10}, y = -\frac{11}{10}, z = -\frac{51}{10}, t = \frac{11}{10}.$

Esercizio 3.14 $x = \frac{1-k}{k^2+1}, y = \frac{k+1}{k^2+1}$; per $k = 1$ non ammette soluzioni, per $k = -1$ $x_1 = t$ e $x_2 = t + 1$, per $k \neq \pm 1$ $x_1 = \frac{2k}{k-1}, x_2 = \frac{k-3}{k-1}; \alpha = -k^2, \beta = k^2 - k + 1.$

Esercizio 3.15 Il primo sistema per $k \neq 0, \pm 2$ ha come unica soluzione $\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$; per $k = 0$

il sistema ha una retta di soluzioni, di equazioni parametriche $\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = t; \end{cases}$ per $k = 2$ il sistema

ha una retta di soluzioni, di equazioni parametriche $\begin{cases} x_1 = t, \\ x_2 = 1 - t, \\ x_3 = t; \end{cases}$ per $k = -2$ il sistema ha

una retta di soluzioni, di equazioni parametriche $\begin{cases} x_1 = 2 - t, \\ x_2 = 1 - t, \\ x_3 = t. \end{cases}$ Il secondo sistema per $k \neq -\frac{4}{3}$,

1 ha come unica soluzione $\begin{vmatrix} x \\ y \\ x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 21/(3k+4) \\ -19/(6k+8) \\ 33/(3k+4) \end{vmatrix}$; per $k = -4/3$ non ammette soluzioni; per

$k = 1$ ha una retta di soluzioni, di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 3, \\ y = 1 - \frac{1}{2}t, \\ z = t. \end{cases}$ Il terzo sistema per

$k \neq 1$ non ammette soluzioni, mentre per $k = 1$ ha una retta di soluzioni, di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 1 - t, \\ z = t. \end{cases}$

Esercizio 3.16 Per $k \neq 0, 1$ il sistema ha come unica soluzione $\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{k} + 5 - \frac{5}{2}k - k^2 \\ k - \frac{1}{2} \\ -3 - \frac{1}{k} \\ k + 1 \end{vmatrix}$; per

$k = 0$ il sistema non ammette soluzioni; per $k = 1$ il sistema ha una retta di soluzioni, di equazioni

$$\text{parametriche} \begin{cases} x = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}t, \\ y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t, \\ z = 2 - 3t, \\ w = t. \end{cases}$$

Esercizio 3.17 Se $a = 4$ oppure $a = -\frac{1}{4}$ e $b \neq \frac{56}{17}$ non ammette soluzione; se $a = -\frac{1}{4}$ e $b \neq \frac{56}{17}$, ci sono le infinite soluzioni $x = t, y = -\frac{4}{255}(34t - 31), z = -\frac{4}{255}(17t + 7)$; se $a \neq 4$ e $a \neq -\frac{1}{4}$ l'unica soluzione è $x = \frac{a^2b+6a-16b+54}{4a^2-15a-4}, y = -\frac{2ab+4a-8b+29}{4a^2-15a-4}, z = -\frac{ab-4a-4b+13}{4a^2-15a-4}$. Se $a \neq 1$ non ammette soluzioni; se $a = 1$ ci sono le infinite soluzioni $x = t, y = \frac{t+1}{2}, z = \frac{1-t}{2}$. Se $a+b-c \neq 0$ non ammette soluzioni, se $c = a+b$ ci sono le infinite soluzioni $x = t, y = a-2t, z = b-2t$.

$$\text{Esercizio 3.18} \begin{cases} x = 1, \\ y = 0, \\ kz = k. \end{cases}$$

Esercizio 3.19 La prima matrice è singolare, mentre la seconda non lo è.

Esercizio 3.20 Entrambe non singolari.

Esercizio 3.21 I pivot della prima matrice valgono 1, -1, 5; quelli della seconda $2, \frac{7}{2}, -8$.

Esercizio 3.22 I pivot valgono 1, 3 e 9 senza alcuno scambio; 1, 3 e -9 scambiando seconda e terza riga; $2, -\frac{3}{2}$ e 9 scambiando prima e seconda riga; $2, 2$ e $\frac{9}{2}$ scambiando inizialmente prima e seconda riga e poi seconda e terza riga. Il valore assoluto del prodotto è sempre uguale a 27; gli scambi di righe che danno come prodotto dei pivot l'opposto di quello ottenuto effettuando un'eliminazione senza scambi di righe sono quelli in cui si scambia la prima riga con la seconda oppure la seconda con la terza.

Esercizio 3.23 Calcolo dei pivot senza scambi di righe:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & \\ 2 & 2 & 9 & \\ 2 & 6 & -3 & \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & \\ 0 & -2 & -1 & \\ 0 & 2 & -13 & \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & \\ 0 & -2 & -1 & \\ 0 & 0 & -14 & \end{array} \right|,$$

per cui i pivot sono $p_1 = 1, p_2 = -2, p_3 = -14$, la loro somma è $p_1 + p_2 + p_3 = -15$ (e il loro prodotto è $p_1 p_2 p_3 = 28$). Calcolo dei pivot scambiando la prima e la terza riga:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & \\ 2 & 2 & 9 & \\ 2 & 6 & -3 & \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -3 & \\ 2 & 2 & 9 & \\ 1 & 2 & 5 & \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -3 & \\ 0 & -4 & 12 & \\ 0 & -1 & 13/2 & \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -3 & \\ 0 & -4 & 12 & \\ 0 & 0 & 7/2 & \end{array} \right|,$$

per cui i pivot sono $q_1 = 2, q_2 = -4, q_3 = 7/2$, la loro somma è $q_1 + q_2 + q_3 = 3/2$ (e il loro prodotto è $q_1 q_2 q_3 = -28$). In particolare, nei due casi la somma dei pivot è completamente diversa (mentre il prodotto dei pivot è lo stesso cambiato di segno, come previsto in quanto abbiamo effettuato uno scambio di righe).

Esercizio 3.24 Nessun $k \in \mathbb{R}; k = 1$ e $k = 3$.

Esercizio 3.25 $k = \frac{1}{2}; k = 0$.

Esercizio 3.26 $k = -1; k = -\frac{1}{2}$.

Esercizio 3.27 La prima matrice è singolare per $k = 6$. La seconda matrice è singolare per $k = 0, -1 + \sqrt{5}$ e $-1 - \sqrt{5}$.

Esercizio 3.30 Scambiando la prima e la terza riga e facendo la riduzione a scala i pivot risultano -1, 2, -1, quindi sono tutti non nulli per ogni valore di $\beta \in \mathbb{R}$. Se si sostituisce alla riga A_2 la combinazione lineare $\beta A_1 - A_1$ e alla riga A_3 la combinazione $\beta A_3 + A_1$, per $\beta = 0$ la matrice risulta avere seconda riga uguale a $-A_1$ e terza riga uguale ad A_1 , quindi le righe A_2 e A_3 sono "scomparse" e il sistema ottenuto non è equivalente a quello iniziale, ma al sistema costituito dalla sola equazione $x_3 = 0$ in tre incognite, che ha come soluzioni tutte le terne $(x_1, x_2, 0)$.

Esercizio 3C.5 Procediamo per induzione su n . Per $n = 0$ il membro sinistro diventa $1 + q$ e il membro destro diventa $(1 - q^2)/(1 + q)$, per cui l'affermazione segue subito dal prodotto notevole $(1 + a)(1 - a) = 1 - a^2$ applicato con $a = q$. Supponiamo allora che l'affermazione sia vera per n , cioè che si abbia

$$(1 + q)(1 + q^2) \cdots (1 + q^{2^n}) = \frac{1 - q^{2^{n+1}}}{1 - q}.$$

Allora

$$\begin{aligned} (1 + q)(1 + q^2) \cdots (1 + q^{2^{n+1}}) &= [(1 + q)(1 + q^2) \cdots (1 + q^{2^n})](1 + q^{2^{n+1}}) \\ &= \frac{(1 - q^{2^{n+1}})}{1 - q} (1 + q^{2^{n+1}}) = \frac{1 - q^{2^{n+2}}}{1 - q}, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato l'ipotesi induttiva nella seconda uguaglianza, e lo stesso prodotto notevole di prima applicato con $a = q^{2^{n+1}}$ nella terza uguaglianza. Dunque la nostra affermazione è vera per $n = 0$, e se è vera per n è vera anche per $n + 1$; per il principio di induzione, la nostra affermazione è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 3C.6 Per $n = 1$ si ha che $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1+1}$, quindi il passo iniziale è verificato. Se l'uguaglianza è vera per n , allora

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} &= \frac{n}{n+1} \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} \\ &= \frac{n(n+2) + 1}{(n+1) \cdot (n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1}{(n+1) \cdot (n+2)} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{(n+1)+1} \end{aligned}$$

che è proprio l'uguaglianza data per $n + 1$.

4 Esercizi del Capitolo 4: Spazi vettoriali

Esercizio 4.1 Poiché $0 + 0 = 0$, dato $v \in V$ trovi $(0 + 0)v = 0v$. Applicando la proprietà 5, ottieni $0v + 0v = 0v$, sommando a entrambi i membri $-0v$ ne segue $0v = 0$.

Esercizio 4.3 Se $\lambda = 0$ dall'assioma (7) nella Definizione 4.2 segue che $\lambda v = 0$. Se $v = 0$ sempre dagli assiomi si ottiene $\lambda 0 = \lambda(0 + 0) = \lambda 0 + \lambda 0$ da cui, usando l'assioma (3), segue $\lambda 0 = 0$. Se viceversa $\lambda v = 0$ e $\lambda \neq 0$ allora

$$v = 1 \cdot v = \left(\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda \right) \cdot v = \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda v) = \frac{1}{\lambda} \cdot 0 = 0.$$

Esercizio 4.4 Il fatto che $\{0\}$, le rette per l'origine, i piani per l'origine ed $\mathbb{R}^3$ siano sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ segue immediatamente dal fatto che sono tutti sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}^3$ chiusi per la somma e per il prodotto per scalare. Viceversa, dato un sottospazio vettoriale $U \subseteq \mathbb{R}^3$, allora $\dim U \leq \dim \mathbb{R}^3 = 3$: se U ha dimensione 0 allora non contiene alcun vettore linearmente indipendente e quindi $U = \{0\}$; se $\dim U = 1$ allora $U = \text{Span}(u_1)$ per un vettore non nullo di $\mathbb{R}^3$ e quindi U è una retta per l'origine, se $\dim U = 2$ allora $U = \text{Span}(u_1, u_2)$ per una coppia di vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^3$ e quindi U è un piano per l'origine, infine se $\dim U = 3$, hai che $U = \mathbb{R}^3$.

Esercizio 4.5 $\mathbb{R}_n[t]$ non è vuoto in quanto contiene tutte le costanti che sono i polinomi di grado 0. Poiché il grado della somma di due polinomi è minore o uguale al massimo dei gradi dei due addendi e il grado del prodotto di un polinomio per una costante non nulla è uguale al grado del polinomio stesso, trovi subito che $\mathbb{R}_n[t]$ è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalare e quindi è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[t]$.

Esercizio 4.6 La matrice nulla è diagonale (e anche triangolare superiore e inferiore), quindi nessuno di questi sottoinsiemi dello spazio delle matrici quadrate è vuoto. Le matrici diagonali sono quelle per le quali gli elementi fuori dalla diagonale sono tutti nulli: poiché gli elementi della somma di due matrici si ottengono sommando quelli che occupano lo stesso posto nei due addendi e sommando due addendi nulli (o moltiplicando un numero reale per 0) si ottiene ancora 0, l'insieme delle matrici diagonali è chiuso per la somma e per il prodotto per scalare. Lo stesso ragionamento funziona per le matrici triangolari superiori (o inferiori) per le quali basta controllare cosa accade per gli elementi sopra (o sotto) la diagonale principale.

Esercizio 4.7 Per il polinomio nullo e per quelli di grado 1 con termine noto nullo.

Esercizio 4.8 Se e solo se $c = 0$.

Esercizio 4.9 $X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in \mathbb{N}\}$ è chiuso rispetto alla somma ma non rispetto al prodotto per scalari; $Y = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \cdot x_2 = 0\}$ è chiuso rispetto al prodotto per scalari ma non rispetto alla somma.

Esercizio 4.15 I vettori delle tre coppie non sono multipli l'uno dell'altro e quindi si tratta in tutti e tre i casi di vettori linearmente indipendenti. Poiché $\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$, la prima coppia di vettori genera $\mathbb{R}^2$; analogamente accade per la seconda in quanto $\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \frac{2}{3}\begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix} - \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$ e per la terza poiché $\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix} - \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix} - \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix}$.

Esercizio 4.16 Le coordinate del primo vettore sono rispettivamente $\begin{vmatrix} -2 \\ 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix}$; quelle del secondo $\begin{vmatrix} 3 \\ -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -\frac{8}{3} \\ \frac{7}{3} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$; quelle del terzo $\begin{vmatrix} 14 \\ -21 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -\frac{35}{3} \\ \frac{28}{3} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -7 \\ 0 \end{vmatrix}$; per l'ultimo $\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \end{vmatrix}$.

Esercizio 4.17 Da $\lambda_1 e_1 + \lambda_2(e_1 + e_2) + \lambda_3(e_1 + e_3) = O$ segue $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = O$, da cui $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$ che implica $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ e quindi i vettori di $\mathcal{B}_1$ sono linearmente indipendenti; inoltre sono 3, che è la dimensione di $\mathbb{R}^3$, e quindi sono una base di $\mathbb{R}^3$. I vettori di $\mathcal{B}_2$ non sono una base di $\mathbb{R}^3$ perché sono linearmente dipendenti dato che $1 \cdot (e_1 + e_2) + 1 \cdot (e_1 + 2e_2 + e_3) - 1 \cdot (2e_1 + 3e_2 + e_3) = O$.

Esercizio 4.18 $\begin{vmatrix} -6 \\ 1 \\ 7 \end{vmatrix}$.

Esercizio 4.19 $t \neq \pm 2$.

Esercizio 4.20 Se $ad - bc \neq 0$, le due uguaglianze

$$\frac{d}{ad-bc} \begin{vmatrix} a \\ c \end{vmatrix} - \frac{c}{ad-bc} \begin{vmatrix} b \\ d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad -\frac{b}{ad-bc} \begin{vmatrix} a \\ c \end{vmatrix} + \frac{a}{ad-bc} \begin{vmatrix} b \\ d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

garantiscono che i due vettori sono generatori. Inoltre se uno di essi fosse multiplo dell'altro, si verificherebbe facilmente che $ad - bc = 0$ il che dà una contraddizione, quindi necessariamente i due vettori sono anche linearmente indipendenti, per cui formano una base. Viceversa, supponi che $ad - bc = 0$: se $c = d = 0$ allora i due vettori dati sono linearmente dipendenti perché entrambi multipli di $\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$; se invece almeno uno fra c e d è non nullo, l'uguaglianza $d \begin{vmatrix} a \\ c \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} b \\ d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ garantisce di nuovo che sono multipli l'uno dell'altro e quindi di nuovo non formano una base.

Esercizio 4.21 Da $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = O$ segue $(\lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3)t + (\lambda_2 - \lambda_3)t^2 = O$, da cui $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0$ e $\lambda_2 - \lambda_3 = 0$ che implica $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ e quindi i polinomi dati sono linearmente indipendenti; inoltre sono 3, che è la dimensione di $\mathbb{R}_2[t]$, e quindi

formano una base di $\mathbb{R}_2[t]$. Le coordinate di q_1 rispetto ad essa sono $\begin{vmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{vmatrix}$, quelle di q_2 sono $\begin{vmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{vmatrix}$.

Esercizio 4.26 Dato che $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono un insieme di generatori di V da essi è possibile estrarre una base: se $\{v_1, \dots, v_n\}$ non fossero linearmente indipendenti, la base ottenuta conterrebbe un numero di elementi strettamente minore di n , il che è in contrasto con il fatto che tutte le basi di uno spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi. Pertanto $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono anche linearmente indipendenti e quindi formano una base di V .

Esercizio 4.27 Se $\{w_1, \dots, w_p\}$ fosse un sistema di generatori di V potresti estrarre da esso una base, che quindi conterrebbe meno di n vettori, contraddicendo il fatto che ogni base di V deve contenere n vettori, in quanto $\dim V = n$.

Esercizio 4.28 Indichiamo con n il numero di variabili: ciascuna equazione individua un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - 1$. Adesso basta notare che, per la formula di Grassmann, aggiungere un'equazione può lasciare invariata la dimensione del sottospazio oppure farla scendere di 1; dato che le equazioni sono in un numero minore delle variabili otteniamo un sottospazio vettoriale di dimensione positiva che quindi contiene un elemento non nullo, ovvero una soluzione non banale.

Esercizio 4.29 Se $\mathcal{A}$ è un insieme di generatori di V , allora deve contenere una base, quindi deve avere almeno n elementi e contiene n vettori linearmente indipendenti. Viceversa, se $k \geq n$ e $\mathcal{A}$ contiene n vettori linearmente indipendenti, tale sottoinsieme di $\mathcal{A}$ costituisce una base e quindi in particolare un insieme di generatori; poiché contiene un insieme di generatori, anche $\mathcal{A}$ è un insieme di generatori.

Esercizio 4.30 $\mathbb{K} = \text{Span}(1)$, quindi $\{1\}$ è una base di $\mathbb{K}$ costituita da un elemento, per cui $\dim \mathbb{K} = 1$.

Esercizio 4.31 Se $\mathbb{R}[t]$ avesse un numero finito di generatori, indicato con d il massimo dei loro gradi, non sarebbe possibile scrivere x^{d+1} come loro combinazione lineare perché il grado di una combinazione lineare di polinomi è minore o uguale al massimo dei gradi dei polinomi che vi compaiono.

Esercizio 4.33 Prendendo le dimensioni dei sotto spazi $V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n$ si trova che $0 \leq \dim V_0 < \dim V_1 < \dots < \dim V_n \leq n$ e pertanto, essendo le disuguaglianze strette, $\dim V_j = j$ per ogni $j = 0, \dots, n$ e, in particolare $V_0 = \{O\}$ e $V_n = V$. Dato un sottospazio $U \subseteq V$, sia $v_1, \dots, v_k$ una sua base che completiamo a una base $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ di V . Posto $V_0 = \{O\}$ e $V_j = \text{Span}(v_1, \dots, v_j)$ per $j = 1, \dots, n$ si ha che $V_0, \dots, V_n$ è una bandiera per la quale $V_k = U$.

Esercizio 4.35 Se $U \subseteq W$, allora $U \cup W = W$ e quindi è un sottospazio vettoriale, lo stesso accade se $W \subseteq U$. Viceversa, se $U \cup W$ è un sottospazio vettoriale e $U \not\subseteq W$, sia $u_0 \in U \setminus W$. Per ogni $w \in W$, $u_0, w \in U \cup W$, quindi la chiusura per la somma di tale sottospazio implica che $u_0 + w \in U \cup W$. Se $u_0 + w \in U$, per differenza $w \in U$; se invece $u_0 + w \in W$, allora per differenza $u_0 \in W$, il che non è, pertanto $w \in U$ per ogni $w \in W$ e quindi $W \subseteq U$. Infine, se $U \subseteq W$, si ha che $U \cup W = U$ è un sottospazio contenente sia U sia W , quindi $U + W$ deve essere contenuto in esso perché è il più piccolo sottospazio vettoriale di V contenente U e W , pertanto $U + W = U \cup W = U$ (e analogamente se $W \subseteq U$).

Esercizio 4.37 $B \cup C$ è sempre un insieme di generatori per $U + W$. Inoltre, essendo $U \cap W = \{O\}$, si ha che $B \cap C = \emptyset$ e $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$, quindi la cardinalità di $B \cup C$ coincide con la dimensione di $U + W$, per cui ne è una base. Se $V = \mathbb{R}^3$, $U = \text{Span}(e_1, e_2)$, $W = \text{Span}(e_1, e_3)$, $B = \{e_1, e_2\}$, $C = \{2e_1, e_3\}$, allora $B \cup C = \{e_1, e_2, 2e_1, e_3\}$ non è una base di $U + W$ perché non è costituita da vettori linearmente indipendenti.

Esercizio 4.38 Per esempio $\mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbb{R} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$, e ce ne sono infiniti altri: basta prendere $\mathbb{R}v_1$ dove v_1 non è un multiplo di v_0 .

Esercizio 4.39 Si vede facilmente che i vettori di W hanno tutti prima componente uguale al doppio della terza, quindi l'unico vettore di U che sta anche in W è O , pertanto $U \cap W = \{O\}$. Inoltre $\dim U = 1$ e $\dim W = 2$, da cui $\dim(U \oplus W) = 3$ e dunque $U \oplus W = \mathbb{R}^3$.

Esercizio 4.40 Poiché $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W = \dim V$, si ha $U \oplus W = V$ e quindi W è un supplementare di U in V . Inoltre

$$\dim(U \cap Z) = \dim U + \dim Z - \dim(U + Z) = \dim U + \dim Z - \dim V = 0,$$

quindi $U \cap Z = \{O\}$ e pertanto anche Z è un supplementare di U in V .

5 Esercizi del Capitolo 5: Applicazioni lineari

Esercizio 5.2

$$T \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) \\ x_1 + x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - y_1 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_2 + y_2 \\ x \\ 0 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$T \begin{vmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\lambda x - \lambda y \\ \lambda x \\ 0 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 2x - y \\ x \\ 0 \end{vmatrix} = \lambda T \begin{vmatrix} x \\ y \\ 0 \end{vmatrix} \text{ per ogni } x_1, y_1, x_2, y_2, x, y, \lambda \in \mathbb{R}, \text{ quindi } T \text{ è}$$

lineare. $S_1 \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \neq 2S_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$, quindi S_1 non lineare; non lo è neppure S_2 in quanto

$$S_2 \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Esercizio 5.3 $k = -2$

$$\textbf{Esercizio 5.4} \quad T \begin{vmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_m + y_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{vmatrix} = T \begin{vmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} + T \begin{vmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{vmatrix} \text{ per ogni } x, y \in \mathbb{R}^n;$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R}).$$

Esercizio 5.6

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\alpha A + \beta B) &= (\alpha a_{11} + \beta b_{11}) + \cdots + (\alpha a_{nn} + \beta b_{nn}) \\ &= \alpha(a_{11} + \cdots + a_{nn}) + \beta(b_{11} + \cdots + b_{nn}) = \alpha \operatorname{tr}(A) + \beta \operatorname{tr}(B) \end{aligned}$$

per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$.

Esercizio 5.8 Indicata con $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$, poni $a_j = T(e_j)$ per $j = 1, \dots, n$. Allora $\varphi_a(e_j) = 0 \cdot a_1 + \cdots + 1 \cdot a_j + 0 \cdot a_{j+1} + \cdots = a_j = T(e_j)$ per $j = 1, \dots, n$, quindi le applicazioni lineari T e φ_a assumono lo stesso valore su una base di $\mathbb{R}^n$ e quindi coincidono.

Esercizio 5.9 Considera le applicazioni $S_1, S_2 : M_{n,n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n,n}(\mathbb{R})$ date rispettivamente da $L_1(A) = A - A^T$, $L_2(A) = A + A^T$; grazie all'Esempio 5.10, sia L_1 sia L_2 sono applicazioni lineari. Poiché $\operatorname{Ker} L_1 = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ e $\operatorname{Ker} L_2 = \mathcal{AS}_n(\mathbb{R})$ i due sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali di $M_{n,n}(\mathbb{R})$. Infine $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$ e $\dim \mathcal{AS}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Esercizio 5.10 Data $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ poniamo $A_1 = (A + A^T)/2$ e $A_2 = (A - A^T)/2$. Poiché la trasposizione è un'operazione lineare e $(A^T)^T = A$ per ogni $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, ottieni subito che $A_1 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ e $A_2 \in \mathcal{AS}_n(\mathbb{R})$, quindi $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{AS}_n(\mathbb{R}) = M_{n,n}(\mathbb{R})$. Se $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{AS}_n(\mathbb{R})$ allora $A = A^T = -A$ e quindi $A = 0$, per cui $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{AS}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$ e hai finito.

Esercizio 5.11 (a) Dato che $O_W \in W_1$ e $T(O_V) = O_W$, allora $O_V \in T^{-1}(W_1)$ che quindi non è vuoto. Se poi $v_1, v_2 \in T^{-1}(W_1)$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, allora $T(v_1), T(v_2) \in W_1$ e quindi $T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) \in W_1$ perché W_1 è un sottospazio vettoriale di W , pertanto $T^{-1}(W_1)$ è chiuso per combinazioni lineari di due vettori ed è quindi un sottospazio vettoriale di V . (b) Dato che V_1 non è vuoto, neppure $T(V_1)$ lo è. Inoltre, se $w_1, w_2 \in T(V_1)$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, allora esistono $v_1, v_2 \in V_1$ tali che $T(v_j) = w_j$ per $j = 1, 2$; essendo V_1 un sottospazio vettoriale di V , trovi che $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in V_1$. Inoltre $T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$ e quest'ultimo vettore risulta pertanto appartenere a $T(V_1)$, come richiesto.

Esercizio 5.13 Se $v_1, \dots, v_k \in V$ sono linearmente dipendenti, allora esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = O_V$; calcolando T su ambo i membri e utilizzando il fatto che è lineare, si trova che $\lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_k T(v_k) = O_W$ e quindi anche $T(v_1), \dots, T(v_k) \in W$ sono linearmente dipendenti. L'altra affermazione è semplicemente la contronominale di quella appena dimostrata.

Esercizio 5.14 Se $T(v_1), \dots, T(v_k)$ fossero linearmente dipendenti, troveremmo $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che $\lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_k T(v_k) = O_W$, da cui $T(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k) = O_W$. Poiché i vettori $v_1, \dots, v_k \in V$ sono linearmente indipendenti $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \neq O_V$, avremmo quindi trovato un vettore non nullo di V la cui immagine per l'applicazione T coincide con quella di O_V , il che contraddice l'iniettività di T .

Esercizio 5.15 $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ applicazione identicamente nulla, $v_1 = e_1, v_2 = e_2$.

Esercizio 5.19 $k = 1$; $\text{Ker } T_1 = \mathbb{R} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}$.

Esercizio 5.20 $T(x) = L_A(x)$ per $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$, quindi T è lineare. $\text{Ker } T = \text{Span} \left(\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} \right)$,

$\text{Im } T = \mathbb{R}^2$.

Esercizio 5.21 $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$. Se $T(x) = O$, in particolare si deve avere $x_1 + x_2 = 0$ e $x_1 - x_2 = 0$, da cui $x_1 = x_2 = 0$ e quindi T è iniettiva.

Esercizio 5.22 $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$. $x \in \text{Ker } T$ se e solo se $Ax = 0$; siccome A è triangolare superiore con 3 pivot non nulli, $\text{Ker } T = \{O\}$ e pertanto T è iniettiva.

Esercizio 5.23 Si ha

$$\begin{aligned} T \left(\lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix} \right) &= T \begin{vmatrix} \lambda a + \mu e & \lambda b + \mu f \\ \lambda c + \mu g & \lambda d + \mu h \end{vmatrix} \\ &= \lambda a + \mu e - 2(\lambda b + \mu f) + \lambda c + \mu g - (\lambda d + \mu h) \\ &= \lambda(a - 2b + c - d) + \mu(e - 2f + g - h) \\ &= \lambda \cdot T \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \mu \cdot T \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

per cui T è lineare. Siccome $\text{Im } T \subseteq \mathbb{R}$ e $\text{Im } T \neq \{0\}$ abbiamo $\text{rg } T = 1$. Dal teorema del rango segue che $\dim \text{Ker } T = \dim M_{2,2}(\mathbb{R}) - \text{rg } T = 4 - 1 = 3$. Le matrici $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ appartengono a $\text{Ker } T$ perché rispettivamente $1 - 2 \cdot 0 + 0 - 1 = 0$, $-1 + 2 \cdot 0 + 1 - 0 = 0$ e $2 - 2 \cdot 1 + 0 - 0 = 0$. Imponendo che la loro combinazione lineare con coefficienti α, β, γ sia nulla ottieni $\alpha - \beta + 2\gamma = 0$, $\gamma = 0$, $\beta = 0$, $\alpha = 0$, quindi sono linearmente indipendenti; essendo 3 sono in numero uguale alla dimensione di $\text{Ker } T$ e pertanto ne costituiscono una base.

Esercizio 5.24 $T(p + q) = \begin{vmatrix} (\alpha p + \beta q)(1) \\ (p + q)(0) \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} p(1) \\ p(0) \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} q(1) \\ q(0) \end{vmatrix} = \alpha T(p) + \beta T(q)$.
 $\text{Ker } T = \text{Span}(t^2 - t)$.

Esercizio 5.25

- 1) Due esempi sono $T_1(x) = \begin{vmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 \\ x_4 \end{vmatrix}$, e $T_2(x) = \begin{vmatrix} x_1 - x_3 \\ 2x_2 \\ 3x_4 \end{vmatrix}$. Più in generale, è sufficiente prendere $T = L_A$, dove $A = \begin{vmatrix} A^1 & A^2 & A^3 & A^4 \end{vmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ è una matrice tale che $A^3 = -A^1$ e $\{A^1, A^2, A^4\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
- 2) Due esempi sono $T_1(x) = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_1 \end{vmatrix}$ e $T_2(x) = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2 \end{vmatrix}$. Più in generale, è sufficiente prendere $T = L_A$ con $A = \begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ \lambda & \mu \end{vmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli.
- 3) Non esistono trovare applicazioni lineari che soddisfino le condizioni date, perché tali condizioni contraddicono il teorema della dimensione.

Esercizio 5.26 $\text{Im } T = \text{Im } S_a$ se e solo se $a = 4$. Inoltre $\dim(\text{Im } T \cap \text{Im } S_a)$ è uguale a 2 se $a = 4$, ed è uguale a 1 altrimenti.

Esercizio 5.27

- (a) Se $\dim V > \dim W$, allora $\text{rg } T \leq \dim W < \dim V$, quindi $\dim \text{Ker } T = \dim V - \text{rg } T > 0$ e pertanto T non può essere iniettiva.
- (b) Se $\dim V < \dim W$ allora $\dim \text{Im } T = \text{rg } T = \dim V - \dim \text{Ker } T \leq \dim V < \dim W$ e quindi T non può essere surgettiva.

6 Esercizi del Capitolo 6: Sistemi lineari

Esercizio 6.2 Il primo sistema ha un piano di soluzioni, di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3}t, \\ y = \frac{1}{3}t - s, \\ z = s, \\ v = -t, \\ w = t. \end{cases}$$

Il secondo sistema ha una retta di soluzioni, di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(1-t), \\ y = \frac{1}{3}(1-4t), \\ z = t. \end{cases}$$

Esercizio 6.3 $x = -t$, $y = -(1 - 2\sqrt{5})t$, $z = 2(\sqrt{5} - 1)t$, $w = (3\sqrt{5} - 1)t$; $x = t$, $y = 4t - 1$, $z = 1 - 3t$.

Esercizio 6.4 Il primo sistema non ammette soluzioni; $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = -3$.

Esercizio 6.5 Il primo sistema per $k \neq 0, 2$ ha come unica soluzione $\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 \\ \frac{3}{k} \\ 1 + \frac{3}{k} \end{vmatrix}$; per

$k = 0$ non ammette soluzioni; per $k = 2$ ha un piano di soluzioni, di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x = 1 - s - t, \\ y = s, \\ z = t. \end{cases}$$
 Il secondo sistema per $k \neq 1, 2$ ha come unica soluzione

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{k^2+k-2}{k-2} \\ \frac{3k^3+2k^2-k(h+8)+2h}{(k-1)(k-2)} \\ -\frac{3k^3+3k^2-k(h+9)+2h}{(k-1)(k-2)} \end{vmatrix};$$

per $k = 1$ e $h \neq 3$ non ammette soluzioni; per $k = 1$ e $h = 3$ ha una retta di soluzioni di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 1 - t, \\ z = t; \end{cases}$$
 per $k = 2$ non ammette soluzioni indipendentemente dal valore di $h \in \mathbb{R}$. Il terzo sistema per $k \neq 1, -2$ ha come unica soluzione

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{k-h^2-h+1}{(k-1)(k+2)} \\ \frac{kh-h^2+h-1}{(k-1)(k+2)} \\ \frac{kh^2+h^2-h-1}{(k-1)(k+2)} \end{vmatrix};$$

per $k = 1$ e $h \neq 1$ non ammette soluzioni; per $k = h = 1$ ha un piano di soluzioni di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x = 1 - s - t, \\ y = s, \\ z = t; \end{cases}$$
 infine, per $k = -2$ non ammette soluzioni indipendentemente dal valore di $h \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6.9 Sia la prima matrice sia la seconda matrice hanno nucleo costituito dal solo vettore nullo, la cui base è vuota, mentre l'immagine di entrambe le matrici è costituita da $\mathbb{R}^3$, quindi si può prendere come base dell'immagine la base canonica.

Esercizio 6.10 La prima matrice ha nucleo costituito dal solo vettore nullo (la cui base è vuota), mentre l'immagine è $\text{Span} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$, una cui base è $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. La seconda matrice ha nucleo $\text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, una cui base è $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, mentre l'immagine di tale matrice è $\mathbb{R}^2$, quindi si può prendere come base dell'immagine la base canonica.

Esercizio 6.11 $\dim \operatorname{Im} A = 3 = \dim \operatorname{Im} A^T$, $\dim \operatorname{Ker} A = 1$ e $\dim \operatorname{Ker} A^T = 0$. $\operatorname{Im} A$ ha una base formata da prima, seconda e quarta colonna di A ; $\operatorname{Ker} A$ è generato da $5e_1 - 4e_2 + 7e_3 \in \mathbb{R}^4$; $\operatorname{Im} A^T$ ha una base formata dalle tre colonne di A^T , $\operatorname{Ker} A^T = \{O\}$. $\dim \operatorname{Im} B = 2 = \dim \operatorname{Im} B^T$, $\dim \operatorname{Ker} B = 0$ e $\dim \operatorname{Ker} B^T = 1$. $\operatorname{Im} B$ ha una base formata dalle due colonne di B ; $\operatorname{Ker} B = \{O\}$; $\operatorname{Ker} B^T$ è generato da $(\pi - 1)e_1 - (2\pi - 1)e_2 + e_3 \in \mathbb{R}^3$; e $\operatorname{Im} B^T$ ha una base formata dalle prime due colonne di B^T .

Esercizio 6.12 $\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Ker} A^T = 1$, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^T = 2$, $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$,

$\operatorname{Im} A = \operatorname{Span} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$; $\operatorname{Ker} A^T = \operatorname{Span} \left(\begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$, $\operatorname{Im} A^T = \operatorname{Span} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$. Il sistema proposto ammette soluzione se e solo se $k = 1$, in tal caso le soluzioni sono date da $x = x$, $y = \frac{x+1}{2}$, $z = \frac{1-x}{2}$.

Esercizio 6.14 $\operatorname{Ker} T = \{O\}$; una base di $\operatorname{Im} T$ è $\{e_2 + e_4, e_1 + e_2 + 2e_4, e_1 - e_2 + e_3\} \subset \mathbb{R}^4$; $T(U) \cap T(W)$ ha dimensione 1 ed è generato da $4e_2 - e_3 + 4e_4 \in \mathbb{R}^4$.

Esercizio 6.15 Per $\alpha \neq 0$, -4 si ha $\operatorname{Im} A_\alpha = \mathbb{R}^3$ e $\operatorname{Ker} A_\alpha = \{O\}$; quindi $\dim \operatorname{Im} A_\alpha = 3$ e $\dim \operatorname{Ker} A_\alpha = 0$. Per $\alpha = 0$ si ha $\dim \operatorname{Im} A_0 = 2$ e $\dim \operatorname{Ker} A_0 = 1$, una base di $\operatorname{Im} A_0$ è $\{-e_2 + 2e_3, e_1 + 2e_2\}$ e $\operatorname{Ker} A_0$ è generato da e_2 . Per $\alpha = -4$ si ha $\dim \operatorname{Im} A_{-4} = 2$ e $\dim \operatorname{Ker} A_{-4} = 1$, una base di $\operatorname{Im} A_{-4}$ è $\{e_1, e_2 - 2e_3\}$, $\operatorname{Ker} A_{-4}$ è generato da $8e_1 - 11e_2 + 4e_3$. Infine, $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Im} A_\alpha \oplus \operatorname{Ker} A_\alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6.18 $\dim \bigcap_{t \in \mathbb{R}} V_t = 0$, una base è l'insieme vuoto; $\dim \bigcap_{t \in \mathbb{R}} W_t = 2$, una base è data da $w_1 = -2e_1 + e_3$, $w_2 = -e_1 + e_4$.

Esercizio 6.20 Equazioni cartesiane per $U \cap W$:
$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ 3x_3 - \frac{5}{2}x_4 = 0; \end{cases} \quad \text{equazioni parametriche per } U \cap W:$$

$$\begin{cases} x_1 = 7t, \\ x_2 = 10t, \\ x_3 = 20t, \\ x_4 = t; \end{cases} \quad \text{equazioni cartesiane per } U + W: 0 = 0; \text{ equazioni parametriche per } U + W:$$

$$\begin{cases} x_1 = t_1, \\ x_2 = t_2, \\ x_3 = t_3, \\ x_4 = t_4. \end{cases}$$

Esercizio 6.21 Si ha $\dim(U + W) = 4$; quindi $U + W = \mathbb{R}^4$, da cui segue che una base

è $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, possibili equazioni parametriche sono
$$\begin{cases} x_1 = t_1, \\ x_2 = t_2, \\ x_3 = t_3, \\ x_4 = t_4, \end{cases} \quad \text{e l'equazione cartesiana è}$$

$0 = 0$. Invece $\dim(U \cap W) = 2$, una base è $\{15e_1 - 9e_2 + 7e_3 - 38e_4, 30e_1 + 36e_2 + 32e_3 - 13e_4\}$,

possibili equazioni cartesiane per $U \cap W$ sono
$$\begin{cases} 11x_1 - 7x_2 + 6x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \end{cases} \quad \text{e possibili equazioni}$$

parametriche sono
$$\begin{cases} x_1 = 15t_1 + 30t_2, \\ x_2 = -9t_1 + 36t_2, \\ x_3 = 7t_1 + 32t_2, \\ x_4 = -38t_1 - 13t_2. \end{cases}$$

Esercizio 6.22 $\dim(U + W) = 4$, base e_1, e_2, e_3, e_4 ; equazioni parametriche per $U + W$:

$$\begin{cases} x_1 = t_1, \\ x_2 = t_2, \\ x_3 = t_3, \\ x_4 = t_4; \end{cases} \quad \text{equazioni cartesiane per } U + W: 0 = 0.$$

$$\dim(U \cap W) = 1, \text{ base } \begin{vmatrix} 87 \\ -116 \\ 1259 \\ 2605 \end{vmatrix}, \text{ equazioni parametriche per } U \cap W: \begin{cases} x_1 = 87t, \\ x_2 = -116t, \\ x_3 = 1259t, \\ x_4 = 2605t, \end{cases} \quad \text{equazioni}$$

$$\text{cartesiane per } U \cap W: \begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 86x_1 - 209x_2 - 139x_3 + 55x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Esercizio 6.25} \quad x_1 - x_3 + 6x_4 = 0; \begin{cases} x_1 = t - 6\tau, \\ x_2 = s, \\ x_3 = t, \\ x_4 = \tau; \end{cases} \quad \text{non sono le equazioni di partenza perché}$$

per uno stesso sottospazio vettoriale ci sono infinite equazioni parametriche differenti.

$$\text{Esercizio 6.26} \quad \begin{cases} 22x_1 + 14x_2 - 13x_3 = 0, \\ 7x_1 + 8x_2 + 13x_4 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{4t+7s}{3}, \\ x_2 = -\frac{7s+22t}{6}, \\ x_3 = s, \\ x_4 = t; \end{cases} \quad \text{non sono le equazioni di}$$

partenza perché c'è un parametro in meno, dato che il sottospazio vettoriale ha dimensione 2..

$$\text{Esercizio 6.27} \quad \begin{cases} x = -2(s+t), \\ y = s+3t, \\ z = s, \\ w = t; \end{cases} \quad \begin{cases} x+2z+2w = 0, \\ y-z-3w = 0; \end{cases} \quad \text{non sono le equazioni di partenza}$$

perché queste sono due equazioni, mentre quelle di partenza erano tre.

Esercizio 6.28 Per $t \neq 0, -1/2$ si ha $V_t = \mathbb{R}^4$, per cui possibili equazioni parametriche sono

$$\begin{cases} x_1 = s_1, \\ x_2 = s_2, \\ x_3 = s_3, \\ x_4 = s_4, \end{cases} \quad \text{e l'equazione cartesiana è } 0 = 0. \text{ Possibili equazioni parametriche per } V_0 \text{ sono}$$

$$\begin{cases} x_1 = s_1, \\ x_2 = s_1, \\ x_3 = s_3, \\ x_4 = s_1 + s_2, \end{cases} \quad \text{mentre una possibile equazione cartesiana è } x_1 - x_2 = 0. \text{ Possibili equazioni}$$

$$\text{parametriche per } V_{-1/2} \text{ sono } \begin{cases} x_1 = s_1, \\ x_2 = s_1 - \frac{1}{2}s_2, \\ x_3 = -\frac{1}{2}s_1 - \frac{1}{2}s_3, \\ x_4 = s_1 + s_2 + s_3, \end{cases} \quad \text{mentre una possibile equazione cartesiana}$$

$$\text{è } 2x - 2y - 2z - w = 0.$$

$$\text{Esercizio 6.31} \quad \text{Per il primo sottospazio affine } \begin{cases} x_1 + x_2 = -5, \\ x_1 + x_3 = -13, \\ x_1 - x_4 = -2; \end{cases} \quad \text{per il secondo sottospazio}$$

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 0.$$

$$\text{Esercizio 6.34} \quad x + 5y - 8z - 4w = 77.$$

$$\text{Esercizio 6.35} \quad \begin{cases} x = \frac{33}{14} - 25t, \\ y = 44t + \frac{89}{70}, \\ z = -t - \frac{41}{70}, \\ w = 35t. \end{cases}$$

7 Esercizi del Capitolo 7: Matrici e applicazioni lineari

Esercizio 7.1 Poiché $\text{Im}(T \circ S) \subseteq \text{Im } T$, allora $\text{rg}(T \circ S) \leq \text{rg } T$; poiché $\text{Im}(T \circ S) = \text{Im}(T|_{\text{Im } S})$, allora $\text{rg}(T \circ S) \leq \text{rg } S$ e quindi $\text{rg}(T \circ S) \leq \min\{\text{rg } S, \text{rg } T\}$.

Esercizio 7.2 Si ha $S \circ T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = S(x + (2y - x)t + zt^2) = \begin{pmatrix} x \\ 2y + z \\ z \end{pmatrix}$. Da questo segue che

$\text{Ker}(S \circ T)$ è la retta di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 0, \\ y = t, \\ z = -2t, \end{cases}$ e di conseguenza il Teorema della

dimensione implica che $\text{Im}(S \circ T) = \mathbb{R}^2$.

Esercizio 7.3 Dato che $(\text{id}_V - T)(\text{id}_V + T) = \text{id}_V - T + T - T \circ T = \text{id}_V$ e analogamente per $(\text{id}_V + T)(\text{id}_V - T)$, l'inversa di $T + \text{id}_V$ è $\text{id}_V - T$.

Esercizio 7.4 $T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{23} \\ a_{11} & 0 \end{pmatrix}$ è un'applicazione lineare da $M_{3,3}(\mathbb{R})$ a

$M_{2,2}(\mathbb{R})$. Un isomorfismo $T : M_{3,4}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{6,2}(\mathbb{R})$ è $T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$.

Esercizio 7.5 $a \neq 0$ e $a \neq 1$.

Esercizio 7.6 Se $T(v) = O$, allora $v = T^r(v) = T^{r-1}(T(v)) = O$, quindi $\text{Ker } T = \{O\}$ e pertanto T è un isomorfismo.

Esercizio 7.7 Dato $v \in V$, hai $v = (v - P(v)) + P(v)$: il primo addendo appartiene a $\text{Ker } P$ in quanto $P(v - P(v)) = P(v) - P(P(v)) = O$ perché P è una proiezione, mentre il secondo addendo appartiene banalmente a $\text{Im } P$, per cui $\text{Ker } P + \text{Im } P = V$. Inoltre

$$\dim(\text{Ker } P \cap \text{Im } P) = \dim \text{Ker } P + \dim \text{Im } P - \dim(\text{Ker } P + \text{Im } P) = \dim \text{Ker } P + \text{rg } P - \dim V = 0$$

e pertanto $\text{Ker } P$ e $\text{Im } P$ sono in somma diretta, da cui $\text{Ker } P \oplus \text{Im } P = V$.

Esercizio 7.8 Se V e W sono isomorfi, esiste $T : V \rightarrow W$ isomorfismo, quindi $\text{Ker } T = \{O\}$ e $\text{Im } T = W$, pertanto il teorema della dimensione implica che $\dim V = \dim W$. Viceversa, se $\dim V = \dim W = n$, scelte due basi $\mathcal{B}_V$ di V e $\mathcal{B}_W$ di W , allora l'applicazione lineare $F_{\mathcal{B}_W}^{-1} \circ F_{\mathcal{B}_V} : V \rightarrow W$ è un isomorfismo.

Esercizio 7.11 La matrice è λI_n .

Esercizio 7.15 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix};$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 10 \\ -1 & 10 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \\ 9 & 9 \end{vmatrix}.$$

Esercizio 7.16 Sono tutte e sole le matrici della forma $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

Esercizio 7.18 $A^n = \begin{vmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 2 \cdot 3^{n-1} & 2 \cdot 3^{n-1} & 3^{n-2} - 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Esercizio 7.19 Se X_1, X_2 appartengono a W abbiamo $A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = O + O = O$, per cui $X_1 + X_2 \in W$. Analogamente, se $X \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ abbiamo $A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda O = O$, per cui $\lambda X \in W$. Essendo chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari, W è un sottospazio.

Per definizione, una matrice $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ appartiene a W se e solo se $\begin{cases} x_{11} + 2x_{21} = 0, \\ -2x_{11} - 4x_{21} = 0, \\ x_{12} + 2x_{22} = 0, \\ -2x_{12} - 4x_{22} = 0. \end{cases}$

La matrice dei coefficienti di questo sistema è $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$, che ha rango 2. Quindi lo

spazio delle soluzioni del sistema ha dimensione $4 - 2 = 2$; inoltre una base dello spazio delle solu-

zioni è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\}$. Di conseguenza $\dim W = 2$ e una sua base è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \right\}$.

Esercizio 7.21 Per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 7.23

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & 1/2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1/4 & -3/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 5/4 & -3/4 & 1/4 & -7/4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} 6/31 & 2/31 & 5/31 & -4/31 \\ 5/62 & -19/62 & -1/62 & 7/62 \\ -3/31 & -1/31 & 13/31 & 2/31 \\ 3/62 & 1/62 & -13/62 & 29/62 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Esercizio 7.24 La matrice è invertibile per $h \neq \pm\sqrt{2}$, l'inversa è $\frac{1}{h^2-2} \begin{pmatrix} h & -2 & h \\ -2 & 2h & -h^2 \\ 1 & -h & h^2-1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 7.25 $A = I_n, B = -I_n$.

Esercizio 7.26 Se A non è invertibile, allora $\text{Ker } A \neq \{O\}$; preso $v \in \text{Ker } A \setminus \{O\}$, la matrice $B = |v \cdots v| \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ non è nulla e $AB = O$. Viceversa, se esiste $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ non nulla tale che $AB = O$, basta prendere una colonna non nulla di B per ottenere un elemento non nullo di $\text{Ker } A$ e quindi A non è invertibile.

Esercizio 7.27 Se $x \in \text{Ker } A \setminus \{O\}$, abbiamo $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Dato che $x \neq O$, indicato con i l'indice per il quale $|x_i|$ è massimo, a meno di moltiplicare x per uno scalare, possiamo supporre che $x_i = 1$ e $|x_j| \leq 1$ se $j \neq i$. Abbiamo allora $a_{ii} = a_{ii}x_i = -(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{i,i-1}x_{i-1} + \widehat{a_{ii}x_i} + a_{i,i+1}x_{i+1} + \cdots + a_{in}x_n)$. Prendendo il valore assoluto di ambo i membri si trova

$$\begin{aligned} |a_{ii}| &= |a_{i1}x_1 + \cdots + a_{i,i-1}x_{i-1} + \widehat{a_{ii}x_i} + a_{i,i+1}x_{i+1} + \cdots + a_{in}x_n| \\ &\leq |a_{i1}||x_1| + \cdots + |a_{i,i-1}||x_{i-1}| + |\widehat{a_{ii}x_i}| + |a_{i,i+1}||x_{i+1}| + \cdots + |a_{in}||x_n| \\ &\leq |a_{i1}| + \cdots + |a_{i,i-1}| + |\widehat{a_{ii}}| + |a_{i,i+1}| + \cdots + |a_{in}| < |a_{ii}| \end{aligned}$$

che è una contraddizione (l'ultima disuguaglianza è quella fornita dall'ipotesi), per cui $\text{Ker } A = \{O\}$ e quindi A è invertibile.

Esercizio 7.29 Si ha

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(AB) &= (AB)_{11} + \cdots + (AB)_{nn} \\ &= (a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1}) + \cdots + (a_{n1}b_{1n} + \cdots + a_{nn}b_{nn}) \\ &= (b_{11}a_{11} + \cdots + b_{n1}a_{1n}) + \cdots + (b_{1n}a_{n1} + \cdots + b_{nn}a_{nn}) \\ &= (b_{11}a_{11} + \cdots + b_{1n}a_{n1}) + \cdots + (b_{n1}a_{1n} + \cdots + b_{nn}a_{nn}) \\ &= (BA)_{11} + \cdots + (BA)_{nn} = \operatorname{tr}(BA) .\end{aligned}$$

Nota: Questa dimostrazione è più chiara usando il simbolo di sommatoria, che sarà introdotto nell'Osservazione 9.5. Infatti si ha

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{h=1}^n (AB)_{hh} = \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n a_{hk} b_{kh} = \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n b_{kh} a_{hk} = \sum_{k=1}^n (BA)_{kk} = \operatorname{tr}(BA) .$$

Infine,

$$\operatorname{tr}(B^{-1}AB) = \operatorname{tr}(B^{-1}(AB)) = \operatorname{tr}((AB)B^{-1}) = \operatorname{tr}(A(BB^{-1})) = \operatorname{tr}(A) .$$

Esercizio 7.30 $\operatorname{tr}(I_n) = 1 + \cdots + 1 = n$; mentre $\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = 0$; pertanto $AB - BA$ non può mai essere uguale a I_n .

8 Esercizi del Capitolo 8: Cambiamenti di base

Esercizio 8.2 Poiché $U_1, U_2 \subseteq U_1 + U_2$, allora $T(U_1), T(U_2) \subseteq T(U_1 + U_2)$; dato che quest'ultimo è un sottospazio vettoriale, allora $T(U_1) + T(U_2) \subseteq T(U_1 + U_2)$. Viceversa, ogni elemento di $T(U_1 + U_2)$ si scrive come $T(u)$ per un opportuno $u \in U_1 + U_2$; la definizione di $U_1 + U_2$ ci garantisce che esistono $u_1 \in U_1$ e $u_2 \in U_2$ tali che $u = u_1 + u_2$, pertanto $T(u) = T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) \in T(U_1) + T(U_2)$ e quindi anche l'altra inclusione è verificata.

Esercizio 8.3 v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti perché $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = O$ equi-

vale a $\begin{cases} \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ 5\lambda_3 = 0 \end{cases}$ e si vede facilmente che l'unica soluzione di questo sistema lineare

è quella nulla; sono inoltre 3 vettori e $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. La matrice di cambiamento di base dalla base

$\mathcal{B}$ alla base canonica è data da $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & - \\ 1 & 0 & - \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$.

Esercizio 8.4 Le due terne di vettori sono basi di $\mathbb{R}_2[t]$ in quanto contengono vettori in numero uguale alla dimensione di $\mathbb{R}_2[t]$ e tali vettori sono linearmente indipendenti (basta considerare la matrice del cambiamento di base dalla base dei monomi a $\mathcal{B}$ o $\mathcal{C}$ e ridurre a scala. La matrice del

cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ è $\frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3 & -7 & 6 \\ 0 & -4 & 12 \\ -3 & -1 & -6 \end{bmatrix}$.

Esercizio 8.5 Procediamo come nell'Esempio 8.6, con $\mathcal{B}_0 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ come base intermedia. La matrice A (rispettivamente, C) di cambiamento di base da $\mathcal{B}_0$ a $\mathcal{B}$ (rispettivamente, C) contiene per colonne le coordinate degli elementi di $\mathcal{B}$ (rispettivamente, C) rispetto alla base $\mathcal{B}_0$ e quindi sono date da

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

La matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ è $B = A^{-1}C$, assumendo che $(\mathcal{B})$ sia una base e quindi A sia invertibile. Con una riduzione a scala troviamo

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & -2 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) &\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & -1 & 2 & -2 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \\ &\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -1 & 2 & -2 & -3 & -6 \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & -1 & 2 & -2 & -3 & -6 \end{array} \right) \\ &\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3/2 & -25/2 & -3 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Essendo i pivot di A tutti diversi da 0, ne segue che la matrice A è invertibile (e che $\mathcal{B}$ è una base). Proseguendo come nell'Esempio 8.6 otteniamo

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3/2 & -25/2 & -3 & 1 \end{array} \right) &\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 5 & 0 & -1/2 & -21/2 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & -3 & -24 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3/2 & -25/2 & -3 & 1 \end{array} \right) \\ &\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 2 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -3/2 & -39/2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3/2 & -25/2 & -3 & 1 \end{array} \right) \\ &\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 23 & 17/3 & 5/3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -3/2 & -39/2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3/2 & -25/2 & -3 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

e quindi

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 23 & 17/3 & 5/3 \\ -1/2 & -13/2 & -5/3 & 1/3 \\ -1/2 & -3/2 & 0 & 1 \\ 3/2 & 25/2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Infine, una riduzione a scala effettuata sulla matrice C (o sulla matrice B) mostra che anche C è invertibile, per cui anche $\mathcal{C}$ è una base.

Esercizio 8.6 v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti in quanto $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$

equivale a $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ 4\lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$, e riducendo a scala trovi che l'unica soluzione di questo

sistema lineare è quella nulla, inoltre sono 3 vettori e $\dim \mathbb{R}^3 = 3$; lo stesso accade per u_1, u_2, u_3 .

La matrice di cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{C}$ è data da $\frac{1}{30} \begin{pmatrix} 12 & -104 & -34 \\ 27 & 101 & 31 \\ -3 & -29 & 11 \end{pmatrix}$.

Esercizio 8.7 $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ è una base di $\mathbb{R}_3[t]$.

Esercizio 8.8 $\dim W = 3$; una base di W è data da $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 8.9 Procedendo come nell'Esempio 8.2 si trova che $\dim(U + W) = 3$, con base $\{p_1, p_2, q_2\}$, e $\dim(U \cap W) = 1$, con base $\{-6q_2 + q_3 = 6 - 4t + 8t^2\}$.

Esercizio 8.10 $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Esercizio 8.11 (a)

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -16/19 & 23/19 & -24/19 \\ 7/19 & 22/19 & -18/19 \\ 224/19 & 20/19 & 32/19 \end{pmatrix}$$

per L_A , e

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 36/19 & 2/19 & 2/19 \\ 8/19 & 30/19 & -8/19 \\ 85/19 & -9/19 & 86/19 \end{vmatrix}$$

per L_B ;

(b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ -3 & -6 & -4 \end{vmatrix}$$

per L_A , e

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

per L_B ;

(c)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 27/2 & 9/2 & -1 \\ -7/2 & 5/2 & -3 \\ -19/2 & -7/2 & 1 \end{vmatrix}$$

per L_A , e

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 6 & -2 & 1 \\ -9 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

per L_B ;

(d)

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11/19 & 22/19 & 35/19 \\ 13/19 & 26/19 & 31/19 \\ 36/19 & 72/19 & 4 \end{vmatrix}$$

per L_A , e

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6/19 & 14/19 & 4/19 \\ 14/19 & 20/19 & 22/19 \\ -8/19 & -44/19 & -94/19 \end{vmatrix}$$

per L_B .

Esercizio 8.12 $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}.$

Esercizio 8.13 Una (facilissima) riduzione a scala della matrice $B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ mostra

che $\mathcal{B}$ è una base. L'endomorfismo T dev'essere della forma L_A , dove $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ è tale che

$AB = C$, dove $C = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ contiene i vettori w_1, w_2, w_3 . Quindi

$$A = CB^{-1} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Questa è anche la matrice associata a T rispetto alla base canonica, mentre la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$B^{-1}AB = B^{-1}(CB^{-1})B = B^{-1}C = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3/2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Esercizio 8.14 $\dim \operatorname{Im} T = 1$, base di $\operatorname{Im} T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; $\dim \operatorname{Im} T = 3$, base di $\operatorname{Ker} T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Esercizio 8.15 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Esercizio 8.16 $B = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$; $T \left(\begin{pmatrix} x_3 - 2x_2 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -x_2 + 3x_3 \\ -2x_3 + x_4 \\ -5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \\ x_2 - x_4 \end{pmatrix}$. Poiché $-x_2 + 3x_3 + 2(-2x_3 + x_4) - (-5x_2 + 3x_3 + 2x_4) = 0$, T manda W in sé. La matrice associata a T rispetto a B è data da $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -5 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 8.17 Si ha

$$T(X_1 + X_2) = A(X_1 + X_2) - (X_1 + X_2)A = (AX_1 - X_1A) + (AX_2 - X_2A) = T(X_1) + T(X_2),$$

$$T(\lambda X) = A(\lambda X) - (\lambda X)A = \lambda(AX - XA) = \lambda T(X),$$

per cui T è lineare. Rispetto alla base $B_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ l'endomorfismo T è rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Riducendo a scala si vede subito che $\operatorname{Im} A = \operatorname{Span} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ e che $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$,

per cui $\operatorname{Im} T = \operatorname{Span} \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right)$ e $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$. Siccome la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango 4, ne segue (perché?) che $M_{2,2}(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} T \oplus \operatorname{Im} T$.

Esercizio 8.18 $\operatorname{rg} T = \dim \operatorname{Ker} T = 2$, base $\operatorname{Ker} T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right\}$,

base $\operatorname{Im} T = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right\}$

Esercizio 8.19 $\operatorname{rg} T = 6$, $\dim \operatorname{Ker} T = 3$, base di $\operatorname{Ker} T = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right\}$.

Esercizio 8.20 La prima matrice è data da $\begin{pmatrix} -2 & 6 & 8 \\ 2 & -4 & -4 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, la seconda da $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, base

$\operatorname{Ker} T = \{t^2\}$, base di $\operatorname{Im} T = \{1, t\}$.

Esercizio 8.21 La matrice è $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -20 \end{pmatrix}$, $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Span}(1)$, $\operatorname{Im} T = \operatorname{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -20 \end{pmatrix} \right)$.

Esercizio 8.22 La prima coppia di matrici è costituita da matrici simili: infatti, si passa dall'una all'altra scambiando le ultime due coordinate (che è equivalente a prendere come nuova base quella ottenuta scambiando gli ultimi due vettori della base canonica), per cui

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Le due matrici nella seconda coppia invece non sono simili. Il modo più veloce per dimostrarlo consiste nel ricorrere all'Esercizio 7.25: la traccia della prima matrice è 6, quella della seconda è 11, e quindi non possono essere simili. Un secondo modo consiste nel notare che la prima matrice è invertibile mentre la seconda non lo è, per cui non possono essere simili. Infine, un terzo modo consiste nel procedere come indicato nell'Osservazione 8.2, dove A è la prima matrice e A' la seconda. Il sistema $BA' - AB = O$ nella matrice incognita B è rappresentato dalla matrice

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & -2 & -3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 6 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 4 & -3 & -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Una riduzione a scala mostra che questa matrice è invertibile; quindi il sistema $BA' - AB = O$ ammette solo la soluzione nulla, per cui A e A' non sono simili.

Esercizio 8.23 Sia $n = \dim V$ e $m = \dim W$. Il teorema della dimensione ci dice che il nucleo di T ha dimensione $n - r$; sia $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ una base di $\text{Ker } T$, completiamola a una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ di V , e poniamo $U = \text{Span}(v_1, \dots, v_r)$, e $w_j = T(v_j)$ per $j = 1, \dots, r$. Siccome $U \cap \text{Ker } T = \{O\}$, abbiamo che $T|_U$ è iniettivo; quindi $\{w_1, \dots, w_r\}$ sono linearmente indipendenti. Completiamoli a una base $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_m\}$; si verifica immediatamente che la matrice che rappresenta T rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ è della forma voluta.

Esercizio 8.24 Ad esempio $T = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$.

Esercizio 8.25 Indicati con $v_1, \dots, v_n$ i vettori della base $\mathcal{B}$, il fatto che la matrice associata a T rispetto a $\mathcal{B}$ sia la matrice identità implica che $T(v_j) = v_j$ per $j = 1, \dots, n$. Pertanto id_V e T sono due applicazioni lineari che assumono gli stessi valori su una base su una base e quindi coincidono.

9 Esercizi del Capitolo 9: Determinanti

Esercizio 9.2 $A^T = A$ se e solo se $a_{12} = a_{21}$, $A^2 = \begin{vmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 & a_{12}(a_{11} + a_{22}) \\ a_{12}(a_{11} + a_{22}) & a_{12}^2 + a_{22}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ implica $a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1$, $a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1$ e $a_{12}(a_{11} + a_{22}) = 0$. Se $a_{12} = 0$, allora $a_{11}^2 = a_{22}^2 = 1$; poiché $\det A > 0$, hai che a_{11} e a_{22} devono essere concordi, quindi entrambi uguali a 1 oppure a -1, pertanto $|a_{11} + a_{22}| = 2$. Se invece $a_{12} \neq 0$, allora $a_{22} = -a_{11}$, quindi $\det A = -a_{11}^2 - a_{12}^2 \leq 0$ il che contraddice $\det A > 0$.

Esercizio 9.3 $6\pi, 3, -1$.

Esercizio 9.5 $\frac{3}{2}, 1, -2$.

Esercizio 9.6 Per la prima matrice conviene sostituire R_1 con $R_1 - 3R_3$ e poi usare lo sviluppo di Laplace lungo la terza colonna, ottenendo 36; in alternativa puoi prendere al posto di R_4 la differenza $R_4 - R_2$. Per la seconda matrice sostituendo C_4 con $C_4 + C_1$ e sviluppando lungo C_4 trovi -8; un'altra strategia efficace è prendere al posto di R_3 la differenza $R_3 - R_2$.

Esercizio 9.7 $3(k^2 - 3k - 3), 6k^3 - 14k^2 - 89k - 75$.

Esercizio 9.8 $\det \begin{vmatrix} 5k & k+3 \\ k-1 & k \end{vmatrix} = 4k^2 - 2k + 3$. Questo polinomio non ha radici reali, per cui la matrice assegnata è sempre invertibile se $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 9.9 Il determinante della prima matrice vale $(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_2 - a_1)$, quello della seconda $(a_4 - a_3)(a_4 - a_2)(a_4 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_2 - a_1)$; quello della terza vale $(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_2 - a_1)(a_1 + a_2 + a_3)$; l'ultimo $(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_2 - a_1)(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3)$. Per calcolare il terzo moltiplica la prima riga per a_1 e sottraila alla seconda e moltiplica la seconda riga per a_1^2 e sottraila alla terza, mentre per l'ultimo la prima riga per a_1^2 e sottraila alla seconda e moltiplica la seconda riga per a_1 e sottraila alla terza. La formula per matrici $n \times n$ che generalizza quella ottenuta per la prima e la seconda matrice è

$$(a_n - a_{n-1})(a_n - a_{n-2}) \cdots (a_n - a_1) \cdots (a_2 - a_1) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

Esercizio 9.11 $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}.$

Esercizio 9.12 $C = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$

Esercizio 9.13 Applicando ripetutamente l'omogeneità in ciascuna colonna fissate le altre trovi

$$\det \begin{vmatrix} \lambda A_1 & \lambda A_2 & \cdots & \lambda A_n \end{vmatrix} = \lambda \det \begin{vmatrix} A_1 & \lambda A_2 & \cdots & \lambda A_n \end{vmatrix} = \lambda^2 \det \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & \lambda A_n \end{vmatrix} \\ = \cdots = \lambda^n \det \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{vmatrix}.$$

Esercizio 9.14 $\det A = \det A^T = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A$, per cui $\det A = 0$.

Esercizio 9.15 Se $i = j$ la quantità data è lo sviluppo di Laplace del determinante di A lungo la i -esima riga. Se $i \neq j$, è lo sviluppo di Laplace del determinante di una matrice ottenuta sostituendo alla j -esima riga della matrice A , la i -esima riga di A ; si tratta quindi di una matrice con la i -esima e la j -esima riga uguali e pertanto il suo determinante è nullo.

Esercizio 9.17 Determinante $\frac{1}{6048000} = \frac{1}{2^8 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7} \neq 0$, inversa $\begin{vmatrix} 16 & -120 & 240 & -140 \\ -120 & 120 & -2700 & 1680 \\ 240 & -2700 & 6480 & -4200 \\ -140 & 1680 & -4200 & 2800 \end{vmatrix}.$

Esercizio 9.18 $x = \frac{7}{22}, y = \frac{17}{44}, z = -\frac{15}{44}; x = 3, y = 2, z = 0; x = 885781, y = -887112.$

Esercizio 9.19 $\det \begin{vmatrix} 2k & k-2 \\ k+1 & 3k \end{vmatrix} = 5k^2 + k + 2 \neq 0$ per ogni $k \in \mathbb{R}$. La soluzione è $x = \frac{2k^2+3k-2}{5k^2+k+2}, y = \frac{k(k-3)}{5k^2+k+2}.$

Esercizio 9.20 Il determinante della matrice incompleta vale $-3k^2 + 3k - 1 \neq 0$ per ogni $k \in \mathbb{R}$. La soluzione è $x = \frac{2(k^3-5k^2-2k+2)}{3k^2-3k+1}, y = \frac{4k^3-15k^2+5k-3}{3k^2-3k+1}, z = \frac{2k(k^2-3k-5)}{3k^2-3k+1}.$

Esercizio 9.21 Se A è la matrice nulla, allora S è l'applicazione identicamente nulla e quindi $\det S = 0$; se invece A è una matrice non nulla allora $A \in \text{Ker } S$ e quindi $\det S = 0$ perché $\text{Ker } S$ contiene una matrice non nulla e pertanto non è invertibile. Prendendo come base di $M_{n,n}(\mathbb{R})$ la

base delle matrici elementari, la matrice associata a T è la matrice a blocchi $\begin{vmatrix} A & O & \cdots & O \\ O & A & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \cdots & O & A \end{vmatrix},$

quindi applicando l'Esercizio 9.10, si ottiene che $\det T = (\det A)^n$.

Esercizio 9.22 Il nucleo di T contiene tutti i polinomi costanti, quindi l'endomorfismo non è invertibile e pertanto $\det T = 0$.

Esercizio 9.23 La prima matrice ha rango 2 per $t = 0$, altrimenti ha rango 3; la seconda ha rango 2 per $t = 0$, altrimenti ha rango 3; la terza ha rango 2 per $t = \pm 1$, altrimenti ha rango 3.

10 Esercizi del Capitolo 10: Prodotti scalari

Esercizio 10.1 La prima e la quarta applicazione non sono prodotti scalari, le altre sì. Le matrici richieste sono

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 400 & 0 & 3\sqrt{\pi} \\ 0 & 0 & 0 \\ 3\sqrt{\pi} & 0 & 227 \end{vmatrix}.$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ è definito positivo, $\langle \cdot, \cdot \rangle_3$ è indefinito e non degenere, $\langle \cdot, \cdot \rangle_5$ è semidefinito negativo, $\langle \cdot, \cdot \rangle_6$ è indefinito e degenere, $\langle \cdot, \cdot \rangle_7$ è semidefinito positivo.

Esercizio 10.3 È una forma bilineare: infatti se $p_1, p_2, p, q_1, q_2, q \in \mathbb{R}_n[t]$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\begin{aligned} \langle p_1 + p_2, q \rangle &= (p_1 + p_2)(0)q(0) + \cdots + (p_1 + p_2)(n)q(n) \\ &= (p_1(0) + p_2(0))q(0) + \cdots + (p_1(n) + p_2(n))q(n) \\ &= (p_1(0)q(0) + \cdots + p_1(n)q(n)) + (p_2(0)q(0) + \cdots + p_2(n)q(n)) \\ &= \langle p_1, q \rangle + \langle p_2, q \rangle, \\ \langle p, q_1 + q_2 \rangle &= p(0)(q_1(0) + q_2(0)) + \cdots + p(n)(q_1(n) + q_2(n)) \\ &= p(0)(q_1(0) + q_2(0)) + \cdots + p(n)(q_1(n) + q_2(n)) \\ &= (p(0)q_1(0) + \cdots + p(n)q_1(n)) + (p(0)q_2(0) + \cdots + p(n)q_2(n)) \\ &= \langle p, q_1 \rangle + \langle p, q_2 \rangle, \\ \langle \lambda p, q \rangle &= (\lambda p)(0)q(0) + \cdots + (\lambda p)(n)q(n) = \lambda p(0)q(0) + \cdots + \lambda p(n)q(n) \\ &= \lambda(p(0)q(0) + \cdots + p(n)q(n)) = \lambda \langle p, q \rangle, \\ \langle p, \lambda q \rangle &= p(0)(\lambda q(0)) + \cdots + p(n)(\lambda q(n)) = p(0)\lambda q(0) + \cdots + p(n)\lambda q(n) \\ &= \lambda(p(0)q(0) + \cdots + p(n)q(n)) = \lambda \langle p, q \rangle. \end{aligned}$$

È simmetrica:

$$\langle q, p \rangle = q(0)p(0) + \cdots + q(n)p(n) = p(0)q(0) + \cdots + p(n)q(n) = \langle p, q \rangle$$

(nota che se avessimo verificato prima la simmetria avremmo potuto risparmiarci due delle quattro verifiche della bilinearità). Infine, $\langle p, p \rangle = p(0)^2 + \cdots + p(n)^2 \geq 0$ sempre, e $\langle p, p \rangle = 0$ se e solo se $0, \dots, n$ sono radici del polinomio p ; ma l'unico polinomio di grado n con $n+1$ radici è il polinomio nullo, per cui $\langle p, p \rangle = 0$ se e solo se $p \equiv 0$, e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è definito positivo.

Esercizio 10.4

$$\begin{aligned} \langle A_1 + A_2, B \rangle &= \text{tr}(B^T P(A_1 + A_2)) = \text{tr}(B^T P A_1 + B^T P A_2) = \text{tr}(B^T P A_1) + \text{tr}(B^T P A_2) \\ &= \langle A_1, B \rangle + \langle A_2, B \rangle \end{aligned}$$

per ogni $A_1, A_2, B \in M_{2,2}(\mathbb{R})$.

$$\langle \lambda A, B \rangle = \text{tr}(B^T P(\lambda A)) = \lambda \text{tr}(B^T P A) = \lambda \text{tr}(B^T P A) = \langle A, B \rangle$$

per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e $A, B \in M_{2,2}(\mathbb{R})$.

$$\langle B, A \rangle = \text{tr}(A^T P B) = \text{tr}((A^T P B)^T) = \text{tr}(B^T P^T A) = \text{tr}(B^T P A) = \langle A, B \rangle$$

per ogni $A, B \in M_{2,2}(\mathbb{R})$, quindi si tratta di un prodotto scalare. Inoltre se $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ allora $\langle A, A \rangle = \text{tr}(A^T P A) = a^2 + 2ac + 2c^2 + b^2 + 2bd + 2d^2 = (a+c)^2 + c^2 + (b+d)^2 + d^2 \geq 0$. Se poi $\langle A, A \rangle = 0$ allora $a+c = c = b+d = d = 0$ e quindi $A = O$, pertanto si tratta di un prodotto scalare definito positivo.

Esercizio 10.6 Grazie all'additività nella prima e nella seconda variabile e alla simmetria, per ogni $v, w \in V$ hai

$$\begin{aligned} \langle v + w, v + w \rangle &= \langle v, v + w \rangle + \langle w, v + w \rangle = \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + 2\langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle, \end{aligned}$$

da cui l'uguaglianza richiesta.

Esercizio 10.8 Si ha

$$\begin{aligned}\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 &= \langle v+w, v+w \rangle + \langle v-w, v-w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle + \langle v, v \rangle - \langle v, w \rangle - \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= 2(\|v\|^2 + \|w\|^2).\end{aligned}$$

Il parallelogramma di vertici O, v, w e $v+w$ ha due lati lunghi $\|v\|$, due lati lunghi $\|w\|$, e le due diagonali lunghe rispettivamente $\|v+w\|$ e $\|v-w\|$; quindi questa uguaglianza dice che la somma delle aree dei quadrati costruiti sulle diagonali di un parallelogramma è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui lati.

Esercizio 10.9 Una base ortonormale per $\langle, \rangle_2$ è $\frac{e_2}{\sqrt{3}}, \frac{e_3}{\sqrt{\pi}}, \frac{3e_1+e_2}{\sqrt{6}}$.

Esercizio 10.10 $\langle \frac{v_i}{\|v_i\|}, \frac{v_j}{\|v_j\|} \rangle = \frac{1}{\|v_i\|} \langle v_i, \frac{v_j}{\|v_j\|} \rangle = \frac{1}{\|v_i\|\|v_j\|} \langle v_i, v_j \rangle$. Se $i = j$ questa quantità vale $\frac{1}{\|v_i\|^2} \langle v_i, v_i \rangle = 1$, se invece $i \neq j$ trovi 0.

Esercizio 10.11 Applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt ai tre generatori di V otteniamo

$$\begin{aligned}w_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(\left\langle \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle / \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle \right) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \\ w'_3 &= \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} - \left(\left\langle \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle / \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle \right) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \left(\left\langle \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle / \left\langle \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle \right) \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Il fatto che $w'_3 = 0$ significa che il terzo generatore di V si ottiene come combinazione lineare degli altri due; quindi $\dim V = 2$, una sua base ortogonale è data da $\{w_1, w_2\}$, e una base ortonormale è data da $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ con

$$u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 0 \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

Per completare $\mathcal{B}$ a una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt ai vettori $\{u_1, u_2, e_3, e_4\}$: ricordando che $\|u_1\| = \|u_2\| = 1$ otteniamo

$$w_3 = e_3 - \langle e_3, u_1 \rangle u_1 - \langle e_3, u_2 \rangle u_2 = \begin{bmatrix} -1/4 \\ 1/4 \\ 3/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}, \quad w_4 = e_4 - \langle e_4, u_1 \rangle u_1 - \langle e_4, u_2 \rangle u_2 - \frac{\langle e_4, w_3 \rangle}{\langle w_3, w_3 \rangle} w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix};$$

il fatto di non aver ottenuto vettori nulli ci conferma che $\{u_1, u_2, e_3, e_4\}$ era una base di $\mathbb{R}^4$. Quindi $\{u_1, u_2, w_3, w_4\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$, e una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ che completa $\{u_1, u_2\}$ è $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dove

$$u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \begin{bmatrix} -1/2\sqrt{3} \\ 1/2\sqrt{3} \\ \sqrt{3}/2 \\ 1/2\sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad u_4 = \frac{w_4}{\|w_4\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Esercizio 10.12 Se $v \in V$ è ortogonale a U allora è ortogonale a ogni elemento di U , in particolare a u_j per $j = 1, \dots, r$. Viceversa, se $v \perp u_j$ per $j = 1, \dots, r$, preso $u \in U$, esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ tali che $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r$. Pertanto

$$\langle u, v \rangle = \langle \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r, v \rangle = \alpha_1 \langle u_1, v \rangle + \dots + \alpha_r \langle u_r, v \rangle = 0$$

e quindi v è ortogonale a ogni elemento di U .

Esercizio 10.15

$$\begin{aligned}
g(x, y) &= g(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n, y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n) \\
&= x_1 g(e_1, y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n) + \cdots + x_n g(e_n, y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n) \\
&= x_1 y_1 g(e_1, e_1) + \cdots + x_1 y_n g(e_1, e_n) + \cdots + x_n y_1 g(e_n, e_1) + \cdots + x_n y_n g(e_n, e_n) \\
&= y^T S x,
\end{aligned}$$

dove $S \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ è tale che nel posto (i, j) compare $g(e_j, e_i)$.

Esercizio 10.17 La matrice è $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

Esercizio 10.20 Sia P la proiezione ortogonale sul sottospazio $U = \text{Im } P$. Dati $v, w \in V$, scriviamo $v = P(v) + (v - P(v))$ e $w = P(w) + (w - P(w))$. Per definizione di proiezione ortogonale, $v - P(v)$ e $w - P(w)$ sono ortogonali a tutti gli elementi di U , e quindi in particolare sono ortogonali a $P(v)$ e $P(w)$; quindi

$$\begin{aligned}
\langle P(v), w \rangle &= \langle P(v), P(w) + (w - P(w)) \rangle = \langle P(v), P(w) \rangle \\
&= \langle P(v) + (v - P(v)), P(w) \rangle = \langle v, P(w) \rangle,
\end{aligned}$$

per cui P è simmetrico.

Esercizio 10.22

$$\begin{aligned}
\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w \rangle_T &= \langle T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2), w \rangle = \langle \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2), w \rangle \\
&= \lambda_1 \langle T(v_1), w \rangle + \lambda_2 \langle T(v_2), w \rangle = \lambda_1 \langle v_1, w \rangle_T + \lambda_2 \langle v_2, w \rangle_T
\end{aligned}$$

per ogni $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) e ogni $v_1, v_2, w \in V$. Inoltre $\langle w, v \rangle_T = \langle T(w), v \rangle = \langle T(v), w \rangle = \langle v, w \rangle_T$ per ogni $v, w \in V$ grazie al fatto che T è simmetrico; pertanto è un prodotto scalare. Infine se $\langle v, w \rangle_T = 0$ per ogni $w \in V$, allora $\langle T(v), w \rangle = 0$ per ogni $w \in V$ e pertanto $T(v) = 0$; il nucleo di $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$ coincide quindi con $\text{Ker } T$, da cui segue che $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$ è non degenere se e solo se T è invertibile.

Esercizio 10.23 Per ogni $v, w \in V$ hai

$$\langle (T_1 \circ T_2)(v), (T_1 \circ T_2)(w) \rangle = \langle T_1(T_2(v)), T_1(T_2(w)) \rangle = \langle T_2(v), T_2(w) \rangle = \langle v, w \rangle,$$

dove la prima uguaglianza è frutto della definizione di composizione di applicazioni, mentre la seconda e la terza sono dovute al fatto che T_1 (rispettivamente T_2) è un endomorfismo ortogonale. Analogamente $\langle T_1^{-1}(v), T_1^{-1}(w) \rangle = \langle T_1 \circ T_1^{-1}(v), T_1 \circ T_1^{-1}(w) \rangle = \langle \text{id}_V(v), \text{id}_V(w) \rangle = \langle v, w \rangle$, dove la prima uguaglianza viene dal fatto che T_1 è un endomorfismo ortogonale la seconda dal fatto che $T_1 \circ T_1^{-1} = \text{id}_V$ e la terza dalla definizione di id_V .

Esercizio 10.24 Dato che $I_n^{-1} = I_n = I_n^T$, la matrice I_n è ortogonale. Se $A \in O(n)$, allora $A^{-1} = A^T$, prendendo l'inversa di ambo i membri e ricordando che $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ ottieni che $(A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^T$ e quindi anche $A^{-1} \in O(n)$. Se poi $A, B \in O(n)$ allora $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^T A^T = (AB)^T$ e quindi $O(n)$ è un gruppo. Se $n > 1$, basta con-

siderare le matrici $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{vmatrix}$, entrambe ortogonali, per verificare che il

prodotto non è commutativo.

Esercizio 10.25 Infatti $1 = \det I_n = \det(AA^T) = \det(A) \det(A^T) = \det(A)^2$, dove abbiamo usato il Teorema di Binet e il Corollario 9.7, da cui $|\det A| = 1$.

Esercizio 10.26 Siccome B_1 e B_2 sono due basi, esiste un'unica matrice $B \in GL(n, \mathbb{R})$ tale che $Bv_j = w_j$ per $j = 1, \dots, n$ (Proposizioni 5.2 e 7.4). Siccome le due basi sono ortonormali, L_B è un'isometria (Proposizione 10.17), e quindi B è una matrice ortogonale (Corollario 10.19).

Esercizio 10.27 Grazie alla forma del prodotto scalare canonico per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ hai $\langle L_A(x), y \rangle = y^T A x$, mentre $\langle x, L_{A^T}(y) \rangle = (A^T y)^T x = y^T (A^T)^T x = y^T A x$.

11 Esercizi del Capitolo 11: Autovalori e autovettori

Esercizio 11.1 $V_\lambda = \text{Ker}(T - \lambda \text{id}_V)$; siccome $T - \lambda \text{id}_V$ è un endomorfismo lineare, il suo nucleo è un sottospazio vettoriale. Se $V = V_\lambda$, allora $T = \lambda \text{id}_V$.

Esercizio 11.3 A_k è diagonalizzabile se e solo se $k = 0$; B_k è diagonalizzabile se e solo se $k \neq 3$; C_k è diagonalizzabile per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 11.4 A_k è diagonalizzabile se e solo se $k \neq 1$ e $k \neq 3$; B_k è diagonalizzabile se e solo se $k \neq 1$; C_k è diagonalizzabile per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 11.5 $P_{A^T}(\lambda) = \det(A^T - \lambda I_n) = \det((A - \lambda I_n)^T) = \det(A - \lambda I_n) = p_A(\lambda)$.
 $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ ha autovettori $e_1, e_1 + e_2$, mentre $A^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ ha autovettori $e_2, e_1 - e_2$.

Esercizio 11.7 Rispetto alla base $\{1, t, t^2, t^3\}$ di $\mathbb{R}_3[t]$ l'endomorfismo T è rappresentato dalla

matrice $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$. Quindi gli autovalori sono $\{0, 1, 2, 3\}$ e gli autospazi sono $V_0 = \text{Span}(1)$,

$V_1 = \text{Span}(t)$, $V_2 = \text{Span}(t^2)$ e $V_3 = \text{Span}(t^3)$.

Esercizio 11.8 Rispetto alla base $\{1, t, t^2, t^3\}$ di $\mathbb{R}_3[t]$ l'endomorfismo T è rappresentato dal-

la matrice $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. Quindi l'unico autovalore è 0 che ha molteplicità algebrica 4 e geo-

metrica 1, per cui T non è diagonalizzabile. L'autospazio relativo all'autovalore 0 è generato dal polinomio 1.

Esercizio 11.9 Per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 11.10 Rispetto alla base $\left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right\}$ l'endomorfismo T è

rappresentato dalla matrice $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \end{vmatrix}$. Gli autovalori di T sono 1 e 9, entrambi con mol-

teplicità algebrica e geometrica 2, per cui T è diagonalizzabile. Una base dell'autospazio relativo all'autovalore 1 è data da $\left\{ \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \right\}$; una base dell'autospazio relativo all'autovalore

9 è data da $\left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right\}$.

Esercizio 11.11 Autovalore 0; base di autovettori I_2, A .

Esercizio 11.12 Se $T = \lambda_0 \text{id}_V$, la matrice associata a T rispetto a ogni base è data da $\lambda_0 I_n$, dove $n = \dim V$, quindi T è diagonalizzabile. Viceversa, se T è diagonalizzabile e $\text{sp}(T) = \{\lambda_0\}$, allora la molteplicità geometrica dell'unico autovalore λ_0 deve essere uguale a n , cioè $\dim V_{\lambda_0} = n$; pertanto $V_{\lambda_0} = V$ e quindi $T(v) = \lambda_0 v$ per ogni $v \in V$, il che prova che $T = \lambda_0 \text{id}_V$.

Esercizio 11.13 $e_1 + \dots + e_n$ è un autovettore non nullo relativo all'autovalore 1.

Esercizio 11.14 $0 \in \text{sp}(S \circ T)$ se e solo se $\det(S \circ T) = 0$; poiché $\det(S \circ T) = \det S \det T = \det T \det S = \det(T \circ S)$, allora $0 \in \text{sp}(S \circ T)$ se e solo se $0 \in \text{sp}(T \circ S)$. Se $\lambda_0 \neq 0$ appartiene a $\text{sp}(S \circ T)$, sia $v_0 \in V \setminus \{O\}$ tale che $(S \circ T)(v_0) = S(T(v_0)) = \lambda_0 v_0$; allora $T(v_0) \neq O$ e $(T \circ S)(T(v_0)) = T(\lambda_0 v_0) = \lambda_0 T(v_0)$, pertanto $\lambda_0 \in \text{sp}(T \circ S)$; scambiando i ruoli di S e T si ottiene immediatamente anche l'altra inclusione, da cui $\text{sp}(S \circ T) = \text{sp}(T \circ S)$.

Esercizio 11.15 $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, A' = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Esercizio 11.16 Poiché lo spazio $\mathcal{L}(V, V)$ ha dimensione $n \cdot n = n^2$ e gli endomorfismi $\text{id}_V, T, T^2, \dots, T^{n^2}$ sono in tutto $n^2 + 1 > n^2$ esistono $\lambda_0, \dots, \lambda_{n^2} \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che $\lambda_{n^2} T^{n^2} + \dots + \lambda_1 T + \lambda_0 \text{id}_V = O$. Posto $q(t) = \lambda_{n^2} t^{n^2} + \dots + \lambda_1 t + \lambda_0$, abbiamo individuato un polinomio di grado $\leq n^2$ tale che $q(T) = O$; basta allora prendere $p(t) = t^{n^2 - \deg q} q(t)$ per ottenere il polinomio richiesto.

Esercizio 11.17 Se la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ è D diagonale, allora la matrice associata a $p(T)$ rispetto alla stessa base è $p(D)$ che è anch'essa diagonale perché somme e potenze di una matrice diagonale sono ancora diagonali. Il viceversa non è vero perché $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ non è diagonalizzabile, ma $A^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ lo è.

Esercizio 11.20 $T = L_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dove $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ con $U = \text{Span}(e_1)$.

Esercizio 11.21

Autovalori: $13 \pm \sqrt{170}$; autovettori: $(-11 \pm \sqrt{170})e_1 + 7e_2$.

Autovalori 2 (singolo), 1 (doppio); autovettori: $6e_1 - 4e_2 + e_3$; $-3e_1 + 2e_3$, $-2e_1 + e_2$.

Autovalori: 1, autovettori: e_1 ; $(-9 \pm i\sqrt{7})e_1 + 2(-3 \pm i\sqrt{7})e_2 + 4e_3$.

Autovalori: -5 (singolo), -1 (doppio); autovettori: $-e_1 - 2e_2 + e_3$, $-e_1 + e_3$, $2e_1 + e_2$.

Autovalori: 2 (singolo), -1 (doppio); autovettori: $-2e_1 - e_2 + e_3$, $-2e_2 + e_3$, e_1 .

Autovalori: 2, 1, 0; autovettori: $e_1 + e_3$, $e_1 - e_2 + e_3$, $-e_1 + e_3$.

Autovalori: 1 (molteplicità algebrica 3, geometrica 2); autovettori: e_1 , e_2 .

Autovalori: 2 (singolo), 1 (molteplicità algebrica 3, geometrica 2); autovettori: $e_2 + e_3$, $2e_2 + e_3$, e_1 .

Autovalori: 2, 1, autovettori: $e_1 + e_3$, $2e_1 + 3e_3$.

Autovalori: 2 (molteplicità algebrica 3, geometrica 1); autovettori: e_1 .

La prima, la seconda, la quarta, la quinta e la sesta sono diagonalizzabili su $\mathbb{R}$.

Esercizio 11.25 Dato $v \in V$, si può scrivere $v = v - T(v) + T(v)$. Poiché $T^2 = T$, allora $v - T(v) \in \text{Ker } T = V_0$ e $T(v) \in \text{Ker}(T - \text{id}_V) = V_1$; pertanto $V = V_0 \oplus V_1$ e quindi T è diagonalizzabile.

Esercizio 11.26 Dato $v \in V$, si può scrivere $v = \frac{1}{2}(v + T(v)) + \frac{1}{2}(v - T(v))$. Poiché $T^2 = \text{id}_V$, allora $\frac{1}{2}(v + T(v)) \in V_1$ e $\frac{1}{2}(v - T(v)) \in V_{-1}$; pertanto $V = V_1 \oplus V_{-1}$ e quindi T è diagonalizzabile.

Esercizio 11.28 Se $v_0 \neq 0$ è un autovettore relativo a $\lambda_0 \neq 0$ allora $v_0 = \frac{1}{\lambda_0}T(v_0) = T\left(\frac{v_0}{\lambda_0}\right) \in \text{Im } T$.

Se l'endomorfismo T è diagonalizzabile, indicati con $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gli autovalori non nulli di T , si ha $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k} \oplus \text{Ker } T$ perché $\text{Ker } T$ è l'autospazio relativo a (l'eventuale) autovalore $\lambda_0 = 0$. Poiché $\text{Im } T$ è un sottospazio vettoriale di V e $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_k} \subseteq \text{Im } T$, allora $V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k} \subseteq \text{Im } T$ e il calcolo delle dimensioni di tali sottospazi assicura che, grazie al teorema della dimensione, $V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k} = \text{Im } T$, per cui $V = \text{Im } T \oplus \text{Ker } T$. Per provare

che il viceversa non è vero, basta considerare $T = L_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$; in questo

caso $\text{Ker } T = \{0\}$ e $\text{Im } T = \mathbb{R}^2$ e quindi $\text{Im } T$ e $\text{Ker } T$ sono supplementari in $\mathbb{R}^2$, ma T non è diagonalizzabile.

Esercizio 11.29 Il Teorema spettrale dice che esiste una base ortogonale che diagonalizza una matrice quadrata se e solo se la matrice è simmetrica; quindi nel nostro caso l'unica matrice per cui non esiste è la quarta, l'unica non simmetrica. Per le altre matrici, le basi cercate si ottengono calcolando prima gli autovalori, poi i relativi autospazi, e infine prendendo una base ortonormale di ciascun autospazio (se l'autospazio ha dimensione 1 questo ultimo passaggio si riduce a trovare nell'autospazio un autovettore di lunghezza unitaria). Usando questo procedimento, possibili basi ortonormali che diagonalizzano le matrici indicate sono, nell'ordine:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{12+6\sqrt{3}}} \begin{vmatrix} -2-\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} \\ 1 \end{vmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}, \frac{1}{\sqrt{12-6\sqrt{3}}} \begin{vmatrix} -2+\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{3} \\ 1 \end{vmatrix} \right\}, \left\{ \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{vmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{42-2\sqrt{21}}} \begin{vmatrix} 4 \\ 2 \\ \sqrt{21}-1 \end{vmatrix}, \frac{1}{\sqrt{42+2\sqrt{21}}} \begin{vmatrix} -4 \\ -2 \\ \sqrt{21}+1 \end{vmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} \right\}, \left\{ \frac{1}{23} \begin{vmatrix} 3 \\ 6 \\ 22 \end{vmatrix}, \frac{1}{23} \begin{vmatrix} 18 \\ 13 \\ -6 \end{vmatrix}, \frac{1}{23} \begin{vmatrix} 14 \\ -18 \\ 3 \end{vmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{vmatrix}, \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{vmatrix} \right\}, \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \right\}, \left\{ \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{vmatrix} 2 \\ -\sqrt{5} \\ 1 \end{vmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{vmatrix} 2 \\ \sqrt{5} \\ 1 \end{vmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix} \right\}.$$

Esercizio 11.30 $T = L_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dove $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ e $v_0 = e_1$.

Esercizio 11.31 Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalore di un endomorfismo ortogonale A , e sia $v \neq O$ un autovettore di autovalore λ . Allora

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \langle Av, Av \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda^2 \|v\|^2,$$

per cui $\lambda^2 = 1$, cioè $\lambda \in \{-1, 1\}$.

Esercizio 11.34 Ricordando che il determinante di una matrice è uguale al determinante della sua trasposta otteniamo

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_n) = \det(A^T - \lambda I_n^T) = \det(-A - \lambda I_n) \\ &= \det((-1)(A - (-\lambda)I_n)) = (-1)^n \det(A - (-\lambda)I_n) = (-1)^n p_A(-\lambda). \end{aligned}$$

In particolare abbiamo $\det A = p_A(0) = (-1)^n p_A(-0) = (-1)^n \det A$, e quindi se n è dispari segue che $\det A = 0$.

Esercizio 11.35 Se λ_0 è un autovalore di T , la condizione $T^k = 1$ implica $\lambda_0^k = 1$, pertanto $\lambda_0 = \pm 1$, essendo λ_0 reale. Gli autospazi di T possono quindi essere soltanto quelli relativi agli autovalori 1 e -1 . Poiché T è diagonalizzabile, si ha $V = V_1 \oplus V_{-1}$ (eventualmente con uno dei due sottospazi dato dal solo vettore nullo), da cui $T^2 = \text{id}_V$.

Esercizio 11.36 Se λ_0 è un autovalore di T , la condizione $T^k = O$ implica $\lambda_0^k = 0$, pertanto $\lambda_0 = 0$. Poiché T è diagonalizzabile, si ha $V = V_0$, da cui $T = O$.

Esercizio 11.37 La matrice che rappresenta P_U rispetto a B è $\begin{vmatrix} I_r & O \\ O & O_{n-r} \end{vmatrix}$, dove $\dim V = n$

e $\dim U = r$ perché su U la proiezione P_U coincide con l'identità e su $U^\perp$ con l'applicazione nulla. Notiamo poi che la matrice $B^T B$ è la matrice associata alla restrizione del prodotto scalare su U rispetto alla base B_1 . Dato un vettore $u \in U$ e indicate con x le sue coordinate rispetto a B_0 , si ha che $B^T x$ contiene i prodotti scalari dei vettori della base B_1 con u e quindi la matrice $P = B(B^T B)^{-1} B^T$ sulle coordinate rispetto a B_0 dei vettori di U agisce lasciandole invariate. Dato invece un vettore $w \in U^\perp$ e indicate con y le sue coordinate rispetto a B_0 , si ha che $B^T y = 0$ e quindi la matrice $P = B(B^T B)^{-1} B^T$ sulle coordinate rispetto a B_0 dei vettori di $U^\perp$ agisce annullandole. Pertanto P agisce sia sulle coordinate dei vettori di U sia su quelle dei vettori di $U^\perp$ come voluto e quindi è la matrice che rappresenta P_U rispetto alla base B_0 .

Esercizio 11.38 Se $A^T = cA$, allora $A = (A^T)^T = (cA)^T = c(A^T) = c(cA) = c^2 A$. Essendo A non nulla, si ottiene $c^2 = 1$ e quindi $c = \pm 1$.

Esercizio 11.39 Dall'ipotesi segue che per ogni $v, w \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \langle L_A(v+w), v+w \rangle = \langle L_A(v), v \rangle + \langle L_A(v), w \rangle + \langle L_A(w), v \rangle + \langle L_A(w), w \rangle \\ &= \langle L_A(v), w \rangle + \langle L_A(w), v \rangle = \langle L_A(v), w \rangle + \langle v, L_A(w) \rangle. \end{aligned}$$

Quindi per ogni $v, w \in \mathbb{R}^n$ si ha $w^T A v = -(A w)^T v = -w^T A^T v$, da cui segue che $-A^T = A$, cioè A è antisimmetrica.

Esercizio 11.40 Essendo A simmetrica, esiste $U \in O(n)$ tale che $U^{-1} A U = D$, dove

$$D = \begin{vmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{vmatrix} \text{ diagonale. Prendendo } B = U^{-1} \Delta U \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \text{ dove } \Delta = \begin{vmatrix} \sqrt[3]{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt[3]{d_n} \end{vmatrix}$$

è la matrice diagonale sulla cui diagonale ci sono le radici cubiche degli elementi della diagonale di D , si trova una matrice tale che $B^3 = A$. Se $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ non esiste $C \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ tale che $C^2 = A$ perché $\det A = -1$ non può essere uguale a $\det(C^2) = (\det C)^2$ per alcuna matrice a coefficienti reali.

Esercizio 11.41 Per la prima matrice $e_1, \frac{1}{\sqrt{5}}(e_2 - 2e_3), \frac{1}{\sqrt{5}}(2e_2 + e_3)$; per la seconda $e_2, e_3, \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_4), \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_4)$; per la terza non esiste.

Esercizio 11.42 Ricorda che una matrice è triangolabile su $\mathbb{R}$ se e solo se i suoi autovalori sono tutti reali; che è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ se e solo se i suoi autovalori sono tutti reali e con molteplicità algebrica uguale alla molteplicità geometrica; e che è diagonalizzabile da una base ortonormale se e solo se è simmetrica.

Il polinomio caratteristico della prima matrice è $(1 - \lambda)(\lambda^2 - ab)$; quindi la matrice è triangolabile se e solo se $ab \geq 0$, diagonalizzabile da una base ortonormale se e solo se $a = b$, e diagonalizzabile se e solo se $ab > 0$ oppure $a = b = 0$. Se $ab > 0$ una base che la diagonalizza è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+(a/b)}} \\ -\sqrt{a/b} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1+(a/b)}} \\ \sqrt{a/b} \end{pmatrix} \right\}$; se $a = b$ questa è anche una base ortonormale che la diagonalizza. Se $b = 0$ la base canonica la triangolarizza (e la diagonalizza rispetto a una base ortonormale se $a = b = 0$). Infine, se $a = 0$ ma $b \neq 0$ una base che la triangolarizza è $\{e_1, e_3, e_2\}$.

Il polinomio caratteristico della seconda matrice è $(1 - \lambda)(\lambda^2 - (1 + a)\lambda + a + b - 1)$; quindi la matrice è triangolabile se e solo se $\Delta = a^2 - 2a + 5 - 4b \geq 0$, ed è diagonalizzabile da una base ortonormale se e solo se $b = -1$. Se $a^2 - 2a + 5 - 4b > 0$ e $b \neq 1$ allora i tre autovalori sono distinti, per cui la matrice è diagonalizzabile. Se $b = 1$, l'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 2 (o addirittura 3 se $a = 1$) ma molteplicità geometrica 1, per cui la matrice non è diagonalizzabile. Se $a^2 - 2a + 5 - 4b = 0$ e $b \neq 1$ allora l'autovalore $(1 + a)/2$ ha molteplicità algebrica 2 ma molteplicità geometrica 1, per cui la matrice non è diagonalizzabile. Se $\Delta > 0$ una base che la triangolarizza (e che la diagonalizza se $b \neq 1$ e la diagonalizza rispetto a una base ortonormale

se $b = -1$) è $\left\{ \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{8+(1-a+\sqrt{\Delta})^2}} \\ 1 - a + \sqrt{\Delta} \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{\sqrt{8+(1-a-\sqrt{\Delta})^2}} \\ 1 - a - \sqrt{\Delta} \end{pmatrix} \right\}$.

Se $b = 1$ e $a \neq 1$ allora $\Delta = (a-1)^2 > 0$ e una base che la triangolarizza è $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 - a \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Se $b = 1 = a$ allora $\Delta = 0$ e una base che la triangolarizza è $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Infine, se $\Delta = 0$

e $b \neq 1$ allora una base che la triangolarizza è $\left\{ \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 - a \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Il polinomio caratteristico della terza matrice è $(a - t)(t - 2)t$; quindi la matrice è sempre triangolabile, ed è diagonalizzabile da una base ortonormale se e solo se $b = 0$. Se $a \neq 0, 2$ allora i tre autovalori sono distinti, per cui la matrice è diagonalizzabile. Se $b \neq 0$ e $a = 0$ oppure $a = 2$ allora l'autovalore a ha molteplicità algebrica 2 ma molteplicità geometrica 1, per cui la matrice non è diagonalizzabile. Una base che la triangolarizza (e che la diagonalizza se $a \neq 0, 2$, rispetto

a una base ortonormale se $b = 0$) è $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{b^2 + b^2(a-1)^2 + a^2(a-2)^2}} \begin{pmatrix} a(a-2) \\ b(a-1) \\ b \end{pmatrix} \right\}$. Se

$a = 0$ o $a = 2$ una base che la triangolarizza (e la diagonalizza rispetto a una base ortonormale se $b = 0$) è $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Il polinomio caratteristico della quarta matrice è $(b - t)(t^2 - 2t + 1 - a)$; quindi la matrice è triangolabile se e solo se $a \geq 0$, e diagonalizzabile da una base ortonormale se e solo se $a = 1$. Se $a > 0$ e $b \neq 1 \pm \sqrt{a}$ i tre autovalori sono distinti, per cui la matrice è diagonalizzabile. Se $a > 0$ e $b = 1 \pm \sqrt{a}$ l'autovalore b ha molteplicità algebrica e molteplicità geometrica 2, per cui la matrice è ancora diagonalizzabile. Se $a = 0$ e $b \neq 1$ l'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1, per cui la matrice non è diagonalizzabile. Infine, se $a = 0$ e $b = 1$ l'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 3 e molteplicità geometrica 2, per cui la matrice non è diagonalizzabile. Se $a > 0$ una base che la triangolarizza (e diagonalizza, e diagonalizza rispetto a una base ortonormale

se $a = 1$) è $\left\{ \frac{1}{\sqrt{1+a}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{a} \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1+a}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Infine, se $a = 0$ la base canonica la triangolarizza.

Il polinomio caratteristico della quinta matrice è $(a - t)(t^2 - at - a^2 - 1)$; quindi i tre autovalori sono sempre distinti, per cui la matrice è sempre diagonalizzabile, e non è mai diagonalizzabile da una base ortonormale perché non è simmetrica per alcun valore di a . Se $a \neq 0$ una base che

la diagonalizza è $\left\{ \begin{pmatrix} a^2 + a + 2 \\ -a^2 - 1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a + 2 + \sqrt{5a^2 + 4} \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a + 2 - \sqrt{5a^2 + 4} \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix} \right\}$, mentre se $a = 0$

una base che la diagonalizza è $\left\{ \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \right\}$.

Esercizio 11.44 $A = \begin{vmatrix} p & 1 \\ 3p - p^2 - 2 & 3 - p \end{vmatrix}$.

Esercizio 11.45 Se $\det A < 0$, allora $p_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr} A \lambda + \det A$ ha discriminante strettamente positivo e quindi radici reali e distinte, pertanto è diagonalizzabile. Se $\det A = 0$, allora $p_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr} A \lambda$ ha radici reali, quindi è triangolabile. $B = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ non è triangolabile perché $p_B(\lambda) = \lambda^2 + 1$ e $C = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ non è diagonalizzabile perché l'unico autovalore è 0 con molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1.

Esercizio 11.46 Per ogni $v, w \in V$ abbiamo

$$\langle S_u(v), w \rangle = \langle v - 2\langle v, u \rangle u, w \rangle = \langle v, w \rangle - 2\langle v, u \rangle \langle u, w \rangle = \langle v, w - 2\langle w, u \rangle u \rangle = \langle v, S_u(w) \rangle,$$

per cui S_u è simmetrico. Poi

$$\langle S_u(v), S_u(w) \rangle = \langle v - 2\langle v, u \rangle u, w - 2\langle w, u \rangle u \rangle = \langle v, w \rangle - 4\langle w, u \rangle \langle v, u \rangle + 4\langle v, u \rangle \langle w, u \rangle \|u\|^2 = \langle v, w \rangle,$$

per cui S_u è un'isometria. Infine, $S_u(v) = v$ per ogni $v \in V_1$ e $S_u(u) = -u$; quindi una base ortonormale di autovettori di S_u si ottiene aggiungendo u a una base ortonormale di V_1 .