

Giulio Palomba
Stefano Staffolani

Microeconomia

**Introduzione all'Economia Politica:
Soluzioni degli Esercizi**

(ultimo aggiornamento: 25 febbraio 2026)

Indice

Capitolo 2	2
Capitolo 3	15
Capitolo 4	42
Capitolo 5	59
Capitolo 6	67
Capitolo 7	77
Capitolo 8	82
Capitolo 9	87
Capitolo 10	90
Capitolo 11	102
Capitolo 12	108
Capitolo 13	127
Capitolo 14	130
Capitolo 15	132
Capitolo 16	134

Capitolo 2

Esercizio 2.1

Data la funzione di produzione $q = 10L^2 - L^3$, si determinino:

- la produttività marginale e media del lavoro,
 - il valore massimo della produttività marginale,
 - il valore massimo della produttività media,
 - la produttività marginale e media per $L = 4$.
- Si verifichi inoltre che produttività marginale e produttività media sono uguali quando la produttività media è massima.

Soluzione:

- La produttività marginale si ottiene derivando la funzione di produzione rispetto al fattore produttivo lavoro, quindi risulta

$$q'_L = \frac{\partial q}{\partial L} = 20L - 3L^2.$$

La produttività media si ottiene dividendo la funzione di produzione rispetto al fattore produttivo lavoro impiegato, quindi risulta

$$qM_L = \frac{q}{L} = 10L - L^2.$$

- Per calcolare il valore massimo della produttività marginale è sufficiente applicare la condizione del primo ordine

$$\frac{\partial q'_L}{\partial L} = 0 \Rightarrow 20 - 6L = 0 \Rightarrow L_0 = \frac{20}{6} \approx 3.3333,$$

$$\text{quindi risulta } q'_{L,\max} = 20 \cdot \frac{20}{6} - 3 \left(\frac{20}{6} \right)^2 = \frac{200}{3} - \frac{100}{3} = \frac{100}{3} \approx 33.3333.$$

- Applicando la condizione del primo ordine, si ottiene

$$\frac{\partial qM_L}{\partial L} = 0 \Rightarrow 10 - 2L = 0 \Rightarrow L_1 = \frac{10}{2} = 5,$$

$$\text{quindi risulta } qM_{L,\max} = 10 \cdot 5 - 5^2 = 25.$$

- $q'_L(L = 4) = 20 \cdot 4 - 3 \cdot 4^2 = 80 - 48 = 32$ e $qM_L(L = 4) = 10 \cdot 4 - 4^2 = 40 - 16 = 24$.

Calcolando la produttività marginale in corrispondenza di $L = 5$, si ottiene

$$q'_L(L = 5) = 20 \cdot 5 - 3 \cdot 5^2 = 100 - 75 = 25,$$

$$\text{quindi } q'_L(L = 5) = qM_L(L = 5).$$

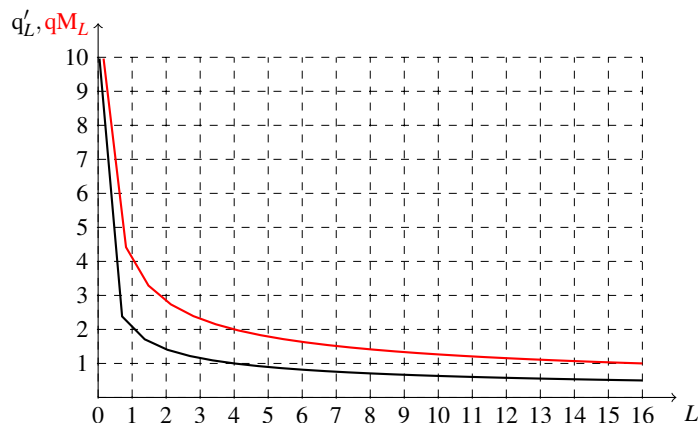
Esercizio 2.2

Si rappresentino la produttività marginale e media del lavoro nel caso della funzione di produzione $q = \sqrt{LK}$ nell'ipotesi in cui il capitale sia fissato al valore $\bar{K} = 16$.

Soluzione:

Dato che il capitale è fissato al valore $\bar{K} = 16$, la funzione di produzione diventa $q = 4\sqrt{L}$, quindi le funzioni di produttività marginale e di produttività da rappresentare sono

$$q'_L = \frac{\partial q}{\partial L} = \frac{2}{\sqrt{L}} \quad \text{e} \quad qM_L = \frac{q}{L} = \frac{4}{\sqrt{L}}.$$



Esercizio 2.3

La funzione di produzione di un'impresa che impiega un solo fattore produttivo (L) è $q = -L^3 + 6L^2 + 4L$. Si determini il valore di L in corrispondenza del quale la produttività marginale e media sono uguali.

Soluzione:

Data la funzione di produzione $q = -L^3 + 6L^2 + 4L$, la produttività marginale e la produttività media sono rispettivamente

$$q'_L = \frac{\partial q}{\partial L} = -3L^2 + 12L + 4 \quad \text{e} \quad qM_L = \frac{q}{L} = -L^2 + 6L + 4.$$

La produttività marginale e quella media sono tra loro uguali quando vale la condizione

$$q'_L = qM_L \Rightarrow -L^2 + 6L + 4 = -3L^2 + 12L + 4 \Rightarrow 2L^2 - 6L = 0 \Rightarrow L = 3,$$

dove la soluzione $L = 0$ è stata esclusa perchè non ha significato economico. Per controllare la correttezza del risultato si possono ricalcolare entrambe le grandezze $L = 3$, ottenendo così

$$q'_L(L=3) = -3 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 + 4 = 13 \quad \text{e} \quad qM_L(L=3) = -3^2 + 6 \cdot 3 + 4 = 13.$$

Anche se non richiesto dal testo si può verificare che, per $L = 3$, la produttività media è massima. Deriviamo rispetto L , si ottiene infatti

$$\frac{\partial qM_L}{\partial L} = 0 \Rightarrow -2L + 6 = 0 \Rightarrow L^* = 3.$$

Soluzioni degli Esercizi

Dato che le funzioni di produttività marginale e di produttività media sono entrambe quadratiche, quindi sono rappresentabili come due parabole con concavità verso il basso, per $L = 3$ la produttività marginale è pari alla produttività media quando quest'ultima assume valore massimo.

Esercizio 2.4

Data la funzione di produzione $q = 10\sqrt{LK}$, si calcoli la differenza tra produttività media e produttività marginale del lavoro nell'ipotesi in cui le quantità utilizzate dei fattori produttivi siano $L = 4$ e $K = 16$.

Soluzione:

Per $K = 16$, la funzione di produzione diventa $q = 40\sqrt{L}$, quindi risultano

$$q'_L = \frac{\partial q}{\partial L} = 20L^{-1/2} \quad \text{e} \quad qM_L = \frac{q}{L} = 40L^{-1/2}.$$

Quando $L = 4$ si ottiene la differenza

$$qM_L(L = 4) - q'_L(L = 4) = \frac{40}{\sqrt{4}} - \frac{20}{\sqrt{4}} = 20 - 10 = 10.$$

Esercizio 2.5

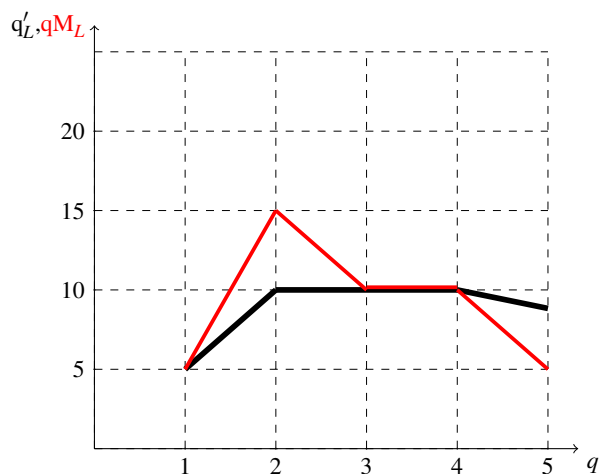
La relazione di breve periodo tra ore-lavoro (L) e unità di output prodotto (q) è data nella seguente tabella. Si completi la tabella inserendo i corrispettivi valori di produttività media (qM_L) e di produttività marginale (q'_L) del lavoro.

L	0	1	2	3	4	5
q	0	5	20	30	40	45
qM_L	-					
q'_L	-					

Si disegnino le curve in un opportuno grafico.

Soluzione:

L	0	1	2	3	4	5
q	0	5	20	30	40	45
qM_L	-	5	10	10	10	9
q'_L	-	5	15	10	10	5



Esercizio 2.6

Si supponga che la funzione di produzione di un'impresa sia $q = L^{0.7}K^{0.3}$. Si calcolino la produttività marginale e la produttività media del lavoro nel caso in cui $L = 120$ e $K = 60$.

Soluzione:

La funzione di produzione $q = L^{0.7}K^{0.3}$ definisce la produzione totale dell'impresa per ogni possibile livello di utilizzo dei fattori produttivi lavoro e capitale.

La produttività marginale del lavoro è data dalla derivata della produzione rispetto all'utilizzo del lavoro, quindi risulta

$$q'_L = \frac{\partial q}{\partial L} = 0.7L^{0.7-1}K^{0.3} = 0.7\left(\frac{K}{L}\right)^{0.3}.$$

La produttività media del lavoro è data dal rapporto tra produzione totale e utilizzo del lavoro, quindi si ottiene

$$qM_L = \frac{q}{L} = \frac{L^{0.7}K^{0.3}}{L} = L^{0.7-1}K^{0.3} = \left(\frac{K}{L}\right)^{0.3}.$$

Per $L = 120$ e $K = 60$, risulta $\frac{K}{L} = \frac{1}{2}$, quindi

$$q'_L = 0.7\left(\frac{1}{2}\right)^{0.3} \approx 0.5686 \quad \text{e} \quad qM_L = \left(\frac{1}{2}\right)^{0.3} \approx 0.8123.$$

Esercizio 2.7

Nel breve periodo, la funzione della produttività media del lavoro di un'impresa è una parabola di equazione $qM_L = 100 + 28L - L^2$. Si determini il valore di L tale per cui questa funzione interseca quella della produttività marginale del lavoro.

Soluzione:

Dato che $qM_L = \frac{q}{L}$, emerge che $q = qM_L L$. Quindi

$$q = (100 + 28L - L^2)L = 100L + 28L^2 - L^3;$$

derivando rispetto al fattore produttivo lavoro, si ottiene

$$q'_L = \frac{\partial q}{\partial L} = 100 + 56L - 3L^2.$$

La condizione $q'_L = qM_L$ è quindi rispettata se

$$100 + 56L - 3L^2 = 100 + 28L - L^2 \Rightarrow 28L = 2L^2$$

che dà la soluzione $L^* = 14$ (soluzione banale $L = 0$ va esclusa).

Si noti che l'esercizio poteva essere risolto anche considerando che la produttività marginale e quella media sono uguali quando la produttività media è massima (si veda il riquadro MAT 2.2). Quindi la soluzione poteva essere semplicemente ottenuta colcolando il valore massimo della produttività media, cioè

$$\frac{\partial qM_L}{\partial L} = 0 \Rightarrow 28 - 2L = 0 \Rightarrow L^* = 14.$$

Esercizio 2.8

Data la funzione di produzione $q = \sqrt{K} + 4\sqrt{L}$, si calcoli l'elasticità del prodotto al fattore lavoro sapendo che $\frac{K}{L} = 4$.

Soluzione:

L'elasticità del prodotto rispetto all'occupazione è data da

$$\epsilon_{q,L} = \frac{dq}{dL} \frac{L}{q}.$$

Dalla funzione di produzione si può calcolare agevolmente la derivata (produttività marginale)

$$\frac{\partial q}{\partial L} = 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{L}} = \frac{2}{\sqrt{L}}.$$

L'elasticità vale perciò

$$\varepsilon_{q,L} = \frac{2}{\sqrt{L}} \frac{L}{q} \Rightarrow \varepsilon_{q,L} = \frac{2}{\sqrt{L}} \frac{L}{\sqrt{K} + 4\sqrt{L}} = 2 \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{K} + 4\sqrt{L}}.$$

Poiché il testo suggerisce $\frac{K}{L} = 4$, si ottiene $K = 4L$. Sostituendo, risulta

$$\varepsilon_{q,L} = 2 \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{4L} + 4\sqrt{L}} = 2 \frac{\cancel{\sqrt{L}}}{\cancel{\sqrt{L}}(2 + 4)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Dal punto di vista interpretativo, questo risultato indica che, se l'utilizzo del lavoro cresce dell'1%, la produzione dell'impresa cresce di circa lo 0.3333% oppure, se l'utilizzo del lavoro cresce del 3%, allora la produzione cresce dell'1%.

Esercizio 2.9

Si supponga che la produttività media e la produttività marginale del lavoro di un'impresa valgano rispettivamente $qM_L = 2$ e $q'_L = 7$: di quanto aumenta percentualmente la produzione di output (q) se l'input lavoro (L) impiegato è aumentato del 2%?

Soluzione:

La soluzione dell'esercizio consiste nel valore dell'elasticità del prodotto rispetto all'utilizzo del fattore lavoro la quale è data dal rapporto tra produttività marginale e produttività media del lavoro. In formule, risulta quindi

$$\varepsilon_{q,L} = \frac{\partial q}{\partial L} \frac{L}{q} = \frac{q'_L}{qM_L} = \frac{7}{2} = 3.5.$$

Esercizio 2.10

Nella funzione di produzione di un'impresa l'unico input variabile è il lavoro (L) per il quale la produttività marginale è costante pari a $q'_L = 4$; sapendo che l'impresa produce la quantità $q = 240$ utilizzando 120 ore-lavoro, si determini l'elasticità della produzione rispetto ad L .

Soluzione:

Poiché l'elasticità del prodotto rispetto all'utilizzo del fattore lavoro è data dal rapporto tra produttività marginale e produttività media del lavoro, si ottiene

$$\varepsilon_{q,L} = \frac{\partial q}{\partial L} \frac{L}{q} = \frac{q'_L}{qM_L} = \frac{4}{\frac{240}{120}} = 2.$$

Esercizio 2.11

Data la funzione di produzione di lungo periodo $q(L, K) = 4\ln L + \ln K$, si calcoli il saggio marginale di sostituzione tecnica nel punto in cui l'utilizzo delle ore-lavoro (L) è 8 volte quello delle ore-capitale (K).

Soluzione:

Il calcolo del saggio marginale di sostituzione tra lavoro e capitale relativo alla funzione di è stabilito dalla relazione

$$\text{SMST}(L, K) = -\frac{q'_L}{q'_K}.$$

Dato che risultano

$$q'_L = \frac{\partial q}{\partial L} = \frac{4}{L} \quad \text{e} \quad q'_K = \frac{\partial q}{\partial K} = \frac{1}{K},$$

si ottiene

$$\text{SMST}(L, K) = -\frac{\frac{4}{L}}{\frac{1}{K}} = -\frac{4K}{L}.$$

Per $L = 8K$, si ottiene

$$\text{SMST}(L, K) = -\frac{1}{2}.$$

Data la situazione descritta nel testo e ricordando che $\text{SMST}(L, K) = \frac{\partial \Delta K}{\partial \Delta L}$, l'impresa può ottenere la stessa produzione se riduce l'utilizzo del lavoro per una unità di lavoro aumentando l'utilizzo del capitale per 1/2.

Esercizio 2.12

Si ipotizzi che la funzione di produzione di un'impresa sia $q = \ln L^2 + \ln K$, dove $L = 4$ e $K = 2$ sono rispettivamente le ore-lavoro e le ore-capitale impiegate. Sapendo che l'impresa vuole produrre la stessa quantità di output utilizzando 2 ore lavoro in meno, quante ore in più di capitale dovrebbe impiegare?

Soluzione:

Se $\Delta L = -2$, allora risulta

$$\Delta K = \text{SMST}(L, K) \Delta L = -\frac{q'_L}{q'_K} \Delta L = -\frac{\frac{2}{L}}{\frac{1}{K}} \Delta L = -\frac{2K}{L} \Delta L = -\frac{2 \cdot 2}{4} (-2) = 2.$$

In base a questo risultato, l'impresa può ottenere la stessa produzione se riduce l'utilizzo del lavoro per due unità di lavoro e aumenta l'utilizzo del capitale per due unità.

• ————— **Esercizio 2.13** ————— •

Si ipotizzi che il saggio marginale di sostituzione tecnica tra lavoro (L) e capitale (K) sia $|\text{SMST}(L, K)| = 1.25$. Se si volesse produrre la stessa quantità di output utilizzando 4 unità in meno di L , quante unità in più di K si dovrebbero impiegare?

Soluzione:

Se $\Delta L = -4$, allora risulta

$$\Delta K = \text{SMST}(L, K)\Delta L = -1.25\Delta L = -1.25(-4) = 5.$$

In base a questo risultato, l'impresa può ottenere la stessa produzione se riduce l'utilizzo del lavoro per 4 unità di lavoro e aumenta l'utilizzo del capitale per 5 unità.

• ————— **Esercizio 2.14** ————— •

Si calcolino la produttività marginale del lavoro, la produttività marginale del capitale e l'elasticità di sostituzione per la funzione di produzione $q = 7\ln L + 3\ln K$, sapendo che l'impresa adotta la combinazione di input $L = 2$ e $K = 6$.

Soluzione:

Il calcolo dell'elasticità di sostituzione (σ) è basato sulla definizione

$$\sigma = \frac{\partial \ln K/L}{\partial \ln |\text{SMST}(L, K)|}$$

che ovviamente richiede la conoscenza del saggio marginale di sostituzione tecnica che vale

$$|\text{SMST}(L, K)| = \frac{7}{3} \frac{K}{L}$$

che può essere risolto in

$$\frac{K}{L} = \frac{3}{7} |\text{SMST}(L, K)|.$$

Passando ai logaritmi, si ottiene

$$\ln \frac{K}{L} = \ln \frac{3}{7} + \ln |\text{SMST}(L, K)|,$$

quindi

$$\sigma = \frac{\partial \ln K/L}{\partial \ln |\text{SMST}(L, K)|} = 1.$$

Esercizio 2.15

Si consideri la funzione di produzione $q = L^{1/3} K^{3/4}$. Si calcoli il rapporto tra il saggio marginale di sostituzione tecnica $SMST(L, K)$ e l'intensità di capitale (rapporto tra i fattori K/L), specificando il segno.

Soluzione:

Dato che la funzione è di tipo Cobb-Douglas, il saggio marginale di sostituzione tecnica è dato dal rapporto dei coefficienti tecnologici moltiplicato per l'intensità di capitale, cioè

$$SMST(L, K) = -\frac{q'_L}{q'_K} = -\frac{1/3 K}{3/4 L} = -\frac{4}{9} \frac{K}{L}.$$

Il rapporto tra il saggio marginale di sostituzione tecnica e l'intensità di capitale è quindi

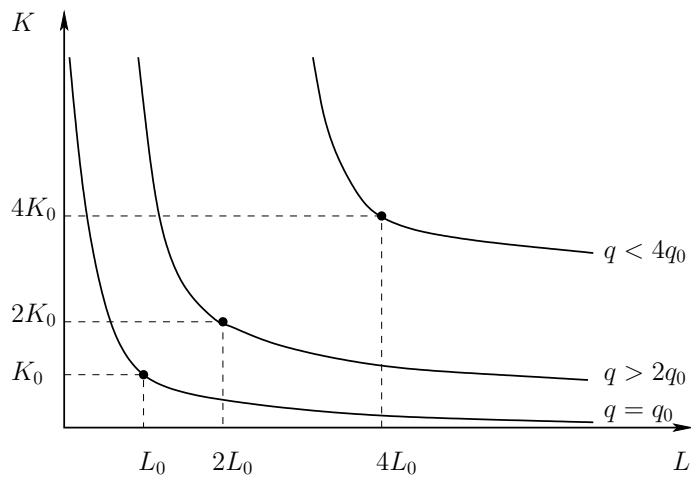
$$\frac{SMST(L, K)}{K/L} = \frac{-\frac{4}{9} \frac{K}{L}}{\frac{K}{L}} = -\frac{4}{9} \approx -0.4444.$$

Esercizio 2.16

Utilizzando come riferimento il grafico in Figura 2.16, si rappresentino graficamente gli isoquanti di produzione relativi ad un'impresa che presenta rendimenti di scala crescenti per bassi utilizzi dei fattori produttivi e rendimenti di scala decrescenti per elevati utilizzi degli stessi (ad esempio, raddoppiando l'utilizzo dei fattori si deve ottenere una produzione più che doppia, ma quadruplicando l'utilizzo dei fattori si deve ottenere una produzione meno che quadrupla).

Soluzione:

Nel caso di rendimenti di scala crescenti, se l'utilizzo di tutti i fattori produttivi viene incrementato nella stessa proporzione, il prodotto cresce in misura più che proporzionale rispetto alla variazione degli input.



Osservando il grafico, se l'utilizzo di entrambi i fattori produttivi raddoppia ($2L_0, K_0$), la produzione cresce più del doppio ($q > 2q_0$). Nel caso di rendimenti di scala decrescenti vale l'opposto: se l'utilizzo di entrambi gli input, ad esempio, quadruplica ($4L_0, 4K_0$), la produzione cresce meno del quadruplo ($q < 4q_0$).

● ————— **Esercizio 2.17** ————— ●

Si determinino i rendimenti di scala nel caso della funzione di produzione $q = L^{1/3} + 10K^{1/3}$.

Soluzione:

Per determinare il tipo di rendimenti di scala occorre stabilire il grado di omogeneità della funzione di produzione. Moltiplicando tutti gli input per la quantità $t > 0$, si ottiene

$$q_1 = (tL)^{1/3} + 10(tK)^{1/3} = t^{1/3} [L^{1/3} + 10K^{1/3}] = t^{1/3} q.$$

Il grado di omogeneità, dato dall'esponente di t , è compreso tra 0 e 1, quindi i rendimenti di scala sono decrescenti.

● ————— **Esercizio 2.18** ————— ●

Data la funzione di produzione $q = L^{1/2}K^{3/5}$, si calcoli il saggio marginale di sostituzione tecnica tra i fattori produttivi (L e K) e si stabilisca il grado di omogeneità della funzione. I rendimenti di scala sono crescenti, decrescenti o costanti?

Soluzione:

La funzione di produzione è di tipo Cobb-Douglas, quindi il saggio marginale di sostituzione tecnica è

$$SMST(L, K) = -\frac{q'_L}{q'_K} = -\frac{5}{6} \frac{K}{L}.$$

Moltiplicando tutti gli input per la quantità $t > 0$, si ottiene

$$q_1 = (tL)^{1/2}(tK)^{3/5} = t^{1/2+3/5}L^{1/2}K^{3/5} = t^{1.1}q.$$

Il grado di omogeneità, dato dall'esponente di t , è maggiore di 1, quindi i rendimenti di scala sono crescenti.

Esercizio 2.19

La funzione di produzione di un'impresa è $q = K^{0.4}L^{0.1}$. Supponendo che l'impresa multipli la scala di produzione (vale a dire entrambi gli input) per 3.24, determinate il rapporto tra il livello di produzione finale (q_1) ottenuto dopo l'aumento della scala ed il livello di produzione iniziale (q_0).

Soluzione:

Moltiplicando la scala di produzione per 3.24, si ottiene

$$q_1 = (3.24K)^{0.4}(3.24L)^{0.1} = 3.24^{0.5}K^{0.4}L^{0.1} = 1.8q_0.$$

Il rapporto tra i livelli di produzione è quindi $\frac{q_1}{q_0} = 1.8$.

Esercizio 2.20

Si assuma che la produzione abbia luogo utilizzando tre fattori produttivi: capitale K , lavoro non qualificato L e lavoro qualificato H . La tecnologia è tale per cui la funzione di produzione è $q = AK^{0.2}L^{0.5}H^\beta$, con $\beta > 0$. Si determini per quali valori di β la funzione di produzione esibisce rendimenti di scala decrescenti.

Soluzione:

Poiché la funzione di produzione è di tipo Cobb-Douglas, si hanno rendimenti crescenti di scala quando la somma dei coefficienti tecnologici è maggiore di 1, quindi deve risultare

$$0.2 + 0.5 + \beta > 1 \quad \Rightarrow \quad \beta > 1 - 0.2 - 0.5 \quad \Rightarrow \quad \beta > 0.3.$$

Esercizio 2.21

La funzione di produzione di un'impresa è data da $q = \sqrt{L+K}$. Per dati L e K , l'impresa produce $q = 145$. Se quadruplica l'utilizzo di entrambi gli input, quanto produce?

Soluzione:

Se l'impresa quadruplica l'utilizzo di entrambi gli input, ottiene

$$q_1 = \sqrt{4L+4K} = 2\sqrt{L+K} = 2q,$$

quindi produce la quantità $q_1 = 2 \cdot 145 = 290$, cioè raddoppia la propria produzione. In questo caso i rendimenti di scala sono decrescenti.

• ————— **Esercizio 2.22** ————— •

Si consideri la funzione di produzione $q = L^{0.1} K^{0.1}$. Si calcoli il rapporto tra saggio marginale di sostituzione tecnica e l'intensità di capitale; si stabilisca inoltre il tipo di rendimenti di scala.

Soluzione:

Poiché la funzione di produzione è di tipo Cobb-Douglas nella quale i coefficienti tecnologici sono tra loro uguali, il saggio marginale di sostituzione tecnica è pari esattamente all'intensità di capitale, quindi risulta

$$\frac{\text{SMST}(L, K)}{K/L} = -1.$$

Poiché la somma dei coefficienti tecnologici è 0.2 (quindi minore di 1), i rendimenti di scala sono decrescenti.

• ————— **Esercizio 2.23** ————— •

L'impresa *This Strange Engine* ha funzione di produzione $q = 2[L^{2/3} + K^{2/3} + F^{2/3}]^3$, dove L , K e F sono rispettivamente gli input lavoro, capitale ed energia. Nel 2018 l'impresa ha prodotto la quantità di output $q_{2018} = 4000$ barili di petrolio al mese e nel 2019 ha raddoppiato l'utilizzo di tutti i fattori produttivi. Quanto riuscirà a produrre?

Soluzione:

Raddoppiando l'utilizzo di tutti i fattori produttivi, nel 2019 l'impresa riesce a produrre la quantità

$$q_{2019} = 2[(2L)^{2/3} + (2K)^{2/3} + (2F)^{2/3}]^3 = 2[2^{2/3}(L^{2/3} + K^{2/3} + F^{2/3})]^3 = (2^{2/3})^3 q_{2018},$$

quindi

$$q_{2019} = 4 \cdot 4000 = 16000.$$

A seguito del raddoppio dell'utilizzo di tutti gli input, l'impresa quadruplica l'output prodotto, quindi i rendimenti di scala sono crescenti.

• ————— **Esercizio 2.24** ————— •

La funzione di produzione di un'impresa è

$$q = \left[\frac{1}{5} L^{0.2} + \frac{3}{5} H^{0.2} + \frac{1}{5} K^{0.2} \right]^{30},$$

dove L sono le ore di lavoro non qualificato, H sono le ore di lavoro qualificato e K sono le ore di utilizzo del capitale. Se l'impresa decidesse di raddoppiare l'utilizzo di tutti i fattori produttivi, quale sarebbe il rapporto tra il nuovo output (q_1) ed il vecchio output (q_0)?

Soluzione:

A seguito del raddoppio nell'utilizzo di tutti gli input, l'impresa produce la quantità

$$q_1 = \left[\frac{1}{5}(2L)^{0.2} + \frac{3}{5}(2H)^{0.2} + \frac{1}{5}(2K)^{0.2} \right]^{30} = (2^{0.2})^{30} \left[\frac{1}{5}L^{0.2} + \frac{3}{5}H^{0.2} + \frac{1}{5}K^{0.2} \right]^{30} = 2^6 q.$$

Il rapporto tra le quantità prodotte è quindi $\frac{q_1}{q} = 2^6 = 64$, quindi i rendimenti di scala sono crescenti.

Esercizio 2.25

La tecnologia produttiva di un'impresa è descritta dalla funzione di produzione $q = 1000 \min\{L, 2K\}$, dove L sono ore di lavoro e K sono le ore di capitale. Inizialmente l'impresa produce $q_0 = 10000$ unità, ma poi decide di aumentare del 50% l'utilizzo di entrambi i fattori produttivi. Qual è la variazione della quantità prodotta? (si indichi il segno)

Soluzione:

La funzione di produzione è quella tipica di due input perfettamente complementari e, come tale, è caratterizzata dal fatto che entrambi tali input siano utilizzati sempre in proporzione fissa. In questo caso risulta perciò $L = 2K$.

Se l'utilizzo di entrambi i fattori produttivi aumenta del 50%, risulta

$$q_1 = 10000 \min\{(1 + 50\%)L, (1 + 50\%)K\} = (1 + 50\%)10000 \min\{L, K\} = (1 + 50\%)q_0,$$

quindi

$$q_1 - q_0 = (1 + 50\%)q_0 - q_0 = \cancel{q_0} + 50\% q_0 - \cancel{q_0} = 0.5 \cdot 10000 = 5000.$$

Capitolo 3

Esercizio 3.1

Si rappresenti graficamente la retta di isocosto nel caso in cui risulta $w = 1\text{€}$, $r = 2\text{€}$ e $CT = 100\text{€}$. Si evidenzi come varia tale retta nei seguenti casi:

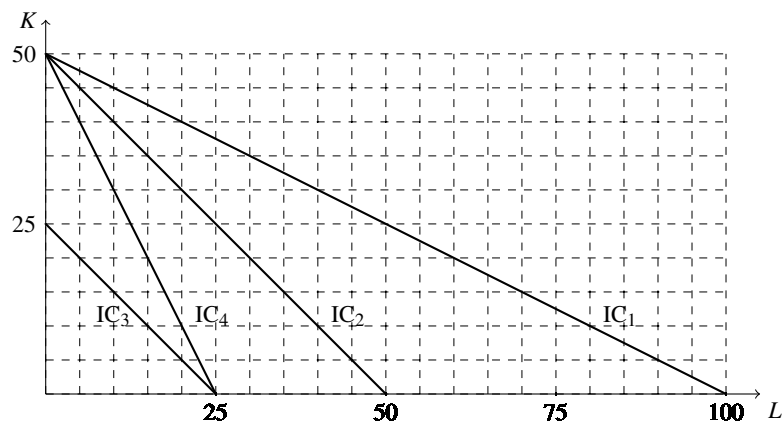
- il salario aumenta al valore $w = 2\text{€}$;
- il costo totale passa al valore $CT = 50\text{€}$;
- il costo del capitale si riduce al valore $r = 1\text{€}$.

Soluzione:

In generale, la retta di isocosto è definita dall'equazione (in forma esplicita) $K = \frac{CT}{r} - \frac{w}{r}L$. Nota questa equazione, è sufficiente sostituire i valori numerici per CT , w , r indicati nei 4 differenti casi del testo, per ottenere le 4 rette di isocosto richieste (si veda la seguente tabella)

CT	w	r	eq. isocosto
100	1	2	$IC_1: K = 50 - 0.5L$
100	2	2	$IC_2: K = 50 - L$
50	2	2	$IC_3: K = 25 - L$
50	2	1	$IC_4: K = 50 - 2L$

Nella seguente figura sono rappresentate tutte le rette di isocosto relative ai diversi valori del costo totale (CT), del costo del lavoro (w) e del costo del capitale (r), evidenziandone le intercette verticali ed orizzontali.



Esercizio 3.2

Si determini l'equazione del sentiero di espansione dell'impresa per le seguenti funzioni di produzione

1. $q = 3L^{1/3} + 8K^{1/4}$,
2. $q = 0.25(\sqrt{L} + \sqrt{K})^2$.

Soluzione:

1. Il sentiero di espansione è definito dall'uguaglianza tra il valore assoluto del saggio marginale di sostituzione tecnica ed il rapporto tra i prezzi dei fattori produttivi, cioè

$$|\text{SMST}(L, K)| = \frac{w}{r} \Rightarrow \frac{L^{-2/3}}{2K^{-3/4}} = \frac{w}{r} \Rightarrow K^{3/4} = 2 \frac{w}{r} L^{2/3} \Rightarrow K = \left(2 \frac{w}{r}\right)^{4/3} L^{8/9}.$$

2. Analogamente al punto precedente, l'equazione del sentiero di espansione dell'impresa è ottenuta attraverso il seguente procedimento

$$|\text{SMST}(L, K)| = \frac{w}{r} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{L} + \sqrt{K})^{-1/2} L^{-1/2}}{\frac{1}{2}(\sqrt{L} + \sqrt{K})^{-1/2} K^{-1/2}} = \frac{w}{r} \Rightarrow \sqrt{\frac{K}{L}} = \frac{w}{r} \Rightarrow K = \left(\frac{w}{r}\right)^2 L.$$

Esercizio 3.3

Sia $q = 140(LK)^{1/4}$ la funzione di produzione di una impresa. Sapendo che $\bar{q} = 5040$ è la quantità prodotta dall'impresa e che il prezzo di un'ora lavoro (L) è pari a 4 volte il prezzo di un'ora capitale (K), si calcolino le quantità ottimali di L e K .

Soluzione:

Dalla condizione di equilibrio si ottiene

$$|\text{SMST}(L, K)| = \frac{w}{r} \Rightarrow \frac{q'_L}{q'_K} = 4 \Rightarrow \frac{K}{L} = 4 \Rightarrow K = 4L,$$

quindi risulta

$$\bar{q} = 140(4L^2)^{1/4} \Rightarrow \bar{q} = 140(2L)^{1/2} \Rightarrow \bar{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{5040}{140} \right)^2 = \frac{36^2}{2} = 648.$$

Sostituendo all'interno del sentiero di espansione dell'impresa, si ottiene

$$\tilde{K} = 4\tilde{L} = 4 \cdot 648 = 2592.$$

Esercizio 3.4

La funzione di produzione di un'impresa è $q = L(K - 2)$. I prezzi dei fattori produttivi sono $w = r = 2\text{€}$. Si determini la combinazione ottima di fattori produttivi sapendo che l'impresa può sopportare un costo totale pari a $\text{CT} = 100\text{€}$.

Soluzione:

Dalla condizione di equilibrio si ottiene

$$|\text{SMST}(L, K)| = \frac{w}{p} \Rightarrow \frac{q'_L}{q'_K} = \frac{2}{2} \Rightarrow \frac{K-2}{L} = 1 \Rightarrow K = L + 2,$$

quindi risulta

$$2(L + K) = \text{CT} \Rightarrow 2L + 2(L + 2) = 100 \Rightarrow 4L + 4 = 100 \Rightarrow \tilde{L}^* = \frac{96}{4} = 24.$$

Sostituendo all'interno del sentiero di espansione dell'impresa, si ottiene

$$\tilde{K} = \tilde{L} + 2 = 24 + 2 = 26.$$

Esercizio 3.5

Data la funzione di produzione $q = \sqrt{L} + \sqrt{K}$, assumendo che l'impresa debba produrre $q = \bar{q}$ minimizzando i costi totali, si calcolino le funzioni condizionali di domanda di lavoro e di capitale per dati $w = 2\text{€}$ e $r = 1\text{€}$; quale sarà il costo necessario per produrre $q = 100$ unità di output?

Soluzione:

Il calcolo delle funzioni di domanda condizionali dei fattori capitale e lavoro richiede la soluzione del sistema (3.5) del testo. La condizione necessaria per la risoluzione di tale sistema è quindi

$$|\text{SMST}(L, K)| = \frac{w}{r} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}L^{-1/2}}{\frac{1}{2}K^{-1/2}} = \frac{w}{r} \Rightarrow \sqrt{\frac{K}{L}} = \frac{w}{r}$$

Data la funzione di produzione del testo, il sistema (3.5) diventa quindi

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{K}{L}} = \frac{w}{r} \\ \bar{q} = \sqrt{L} + \sqrt{K} \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava il sentiero di espansione dell'impresa

$$\sqrt{K} = \frac{w}{r} \sqrt{L}$$

Sostituendo all'interno della seconda equazione, si ottiene

$$\bar{q} = \sqrt{L} + \frac{w}{r} \sqrt{L} \Rightarrow \bar{q} = \sqrt{L} \left(1 + \frac{w}{r}\right)$$

dalla quale si può calcolare la domanda condizionale del fattore L , data da

$$\tilde{L} = \left(\frac{\bar{q}}{\frac{w}{r} + 1} \right)^2 = \left(\frac{r}{w + r} \right)^2 \bar{q}^2$$

Soluzioni degli Esercizi

Infine, sostituendo $\tilde{L}$ all'interno del sentiero di espansione dell'impresa, si ottiene la funzione di domanda condizionale del fattore capitale

$$\sqrt{K} = \frac{w}{w+r} \tilde{L} = \tilde{K} = \left(\frac{w}{w+r} \right)^2 \tilde{L}^2.$$

Si noti che entrambe le domande condizionali sono funzione delle variabili esogene $\tilde{q}$, w e r .

Se $w = 2\text{€}$ e $r = 1\text{€}$, e l'impresa deve produrre $\tilde{q} = 100$ unità, le domande condizionali ammontano rispettivamente a

$$\begin{cases} \tilde{L} = \left(\frac{1}{3} \right)^2 100^2 = \frac{10000}{9} \approx 1111 \\ \tilde{K} = \left(\frac{2}{3} \right)^2 100^2 = 10000 \frac{4}{9} \approx 4444. \end{cases}$$

Il costo totale che deve sostenere l'imprenditore per produrre 100 unità è dato dalla funzione $CT = wL + rK$, quindi risulta

$$CT = 2 \cdot 1111 + 1 \cdot 4444 \approx 6666.67\text{€}.$$

Esercizio 3.6

Si determinino le quantità di lavoro (L) e di capitale (K) domandate da un'impresa con funzione di produzione $q = 0.25(\sqrt{L} + \sqrt{K})^2$, sapendo che riceve una commessa di $q = 45$ unità di output e che i costi dei fattori produttivi hanno lo stesso valore.

Soluzione:

Dalla condizione di equilibrio, si ottiene

$$|\text{SMST}(L, K)| = \frac{w}{r} \Rightarrow \frac{q'_L}{q'_K} = 1 \Rightarrow \frac{0.5(\sqrt{L} + \sqrt{K}) \frac{1}{2\sqrt{L}}}{0.5(\sqrt{L} + \sqrt{K}) \frac{1}{2\sqrt{K}}} = 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{K}{L}} = 1,$$

quindi il sentiero di espansione dell'impresa è dato da $K = L$. Dato che la commessa è di $q = 45$ unità di output, deve risultare

$$0.25(\sqrt{L} + \sqrt{K})^2 = \tilde{q} \Rightarrow 0.25(2\sqrt{L})^2 = 45 \Rightarrow 0.25 \cdot 4L = 45 \Rightarrow \tilde{L} = 45,$$

quindi anche $\tilde{K} = 45$.

Esercizio 3.7

Un'impresa che lavora su commessa ha una tecnologia produttiva descritta dalla funzione di produzione $q = 0.2L^{0.5} + 0.8K^{0.5}$, dove L sono le ore di lavoro e K le ore di capitale. Il prezzo del capitale è $r = 1\text{€}$. Se ricevendo una commessa di 33 unità decidesse di usare $L = 25$ ore di lavoro, a quanto ammonterebbe il salario orario (w)?

Soluzione:

La condizione di equilibrio è

$$|\text{SMST}(L, K)| = \frac{w}{r} \Rightarrow \frac{1}{4} \left(\frac{K}{L} \right)^{0.5} = w \Rightarrow K = 16w^2L.$$

Per $L = 25$, si ottiene $K = 400w^2$. Sostituendo i dati all'interno della funzione di produzione, si ottiene

$$\bar{q} = 0.2L^{0.5} + 0.8K^{0.5} \Rightarrow 33 = 1 + 0.8K^{0.5}.$$

Mettendo a sistema quest'ultima con il sentiero di espansione dell'impresa si ha

$$\begin{cases} K = 400w^2 \\ 33 = 1 + 0.8K^{0.5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = 400w^2 \\ 33 = 1 + 0.8(400w^2)^{0.5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = 400w^2 \\ 33 = 1 + 16w, \end{cases}$$

$$\text{quindi } w = \frac{33 - 1}{16} = 2\text{€}.$$

Esercizio 3.8

La tecnologia di un'impresa dipende dall'utilizzo dei due fattori L e K ed è uguale a $q = 2K + 8L$. Dati i prezzi $w = 6\text{€}$ e $r = 4\text{€}$ e dato che l'impresa deve produrre la quantità $q = 3000$, si determini la quantità utilizzata dei due fattori produttivi.

Soluzione:

La tecnologia espressa dalla funzione di produzione prevede due input perfettamente sostituiti, quindi il valore assoluto del saggio marginale di sostituzione tecnica è costante ed è pari a

$$|\text{SMST}(L, K)| = \frac{q'_L}{q'_K} = \frac{8}{4} = 2.$$

Poiché il rapporto dei prezzi dei fattori produttivi è $\frac{w}{r} = \frac{6}{4} = 1.5$, risulta $|\text{SMST}(L, K)| > \frac{w}{r}$, quindi si ottiene una soluzione d'angolo nella quale la domanda condizionale di capitale è nulla ($\tilde{K} = 0$), mentre dalla funzione di produzione si ricava che la domanda condizionale di lavoro è pari a

$$8L = 3000 \Rightarrow \tilde{L} = \frac{3000}{8} = 375.$$

Esercizio 3.9

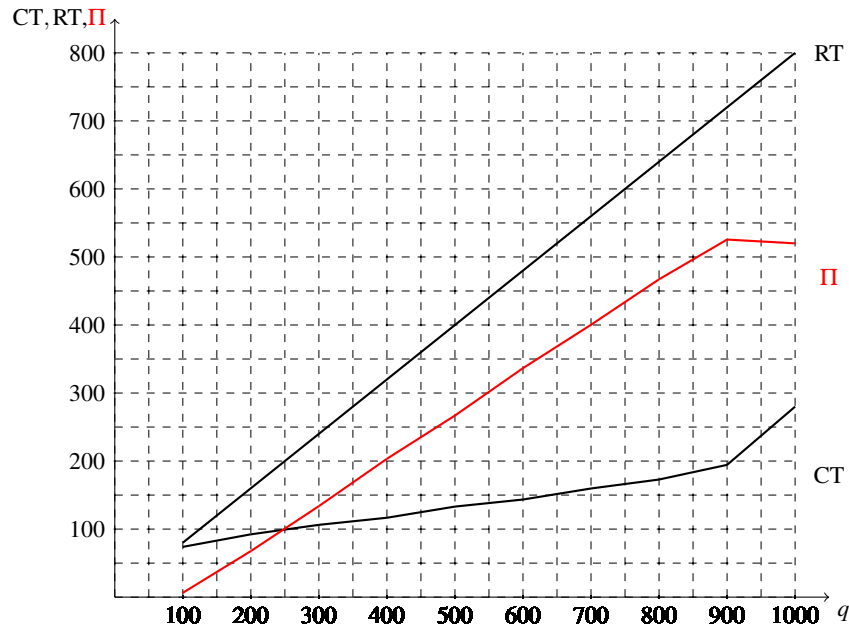
Sulla base dei dati della Tabella 3.5, utilizzando un foglio elettronico, si forniscano due grafici nel quale ci sia la quantità prodotta (q) in ascissa e in ordinata ci siano rispettivamente:

1. il costo totale, il ricavo totale e il profitto;
2. il costo medio, il costo marginale e il prezzo.

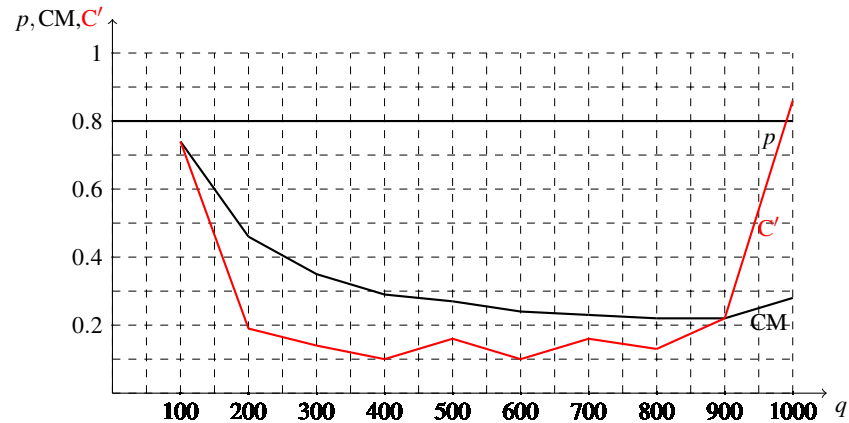
Soluzione:

Per produrre i grafici richiesti, nella prima colonna del foglio elettronico vanno posti i valori della produzione ($q = 100, 200, \dots, 1000$).

1. Disponendo i valori del costo totale (CT), del ricavo totale (RT) e del profitto (Π) rispettivamente nella seconda, terza e quarta colonna (quest'ultima potrebbe essere riempita effettuando la differenza elemento per elemento delle due colonne precedenti). Il grafico che si ottiene è il seguente.



2. Disponendo i valori del costo medio (CM) e del costo marginale (C') rispettivamente nella quinta e sesta colonna, il grafico che si ottiene è il seguente. Poiché $p = 0.8\text{€}$, il grafico del prezzo è una retta orizzontale (costante).



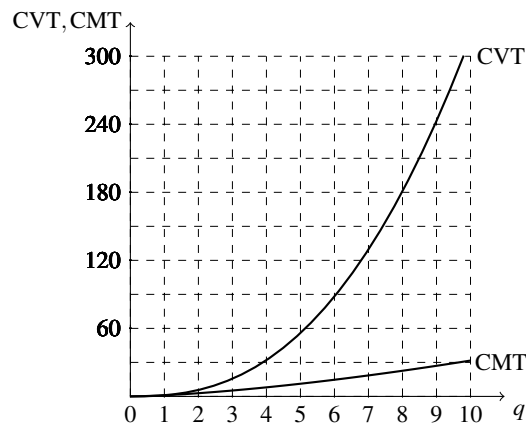
Esercizio 3.10

Data la funzione di produzione $q = L^\alpha$, si rappresentino graficamente il costo variabile totale, il costo medio totale, il costo medio fisso ed il costo marginale per $\alpha = 0.4$.

Soluzione:

Dato un salario w , la funzione di costo variabile totale dell'impresa è $CVT = CT = wq^{1/\alpha}$ (non ci sono costi fissi), mentre il costo medio totale ha equazione $CM = \frac{CT}{q} = wq^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$. Il costo medio fisso non può essere definito in questo esercizio.

Per $\alpha = 0.4$ nella seguente figura sono rappresentate le curve $CVT = q^{5/2}$ e $CMT = q^{3/2}$ sotto l'ipotesi $w = 1\text{€}$.



Esercizio 3.11

Supponendo la funzione di produzione di breve periodo di un'impresa sia $q = 2L^{0.5}\bar{K}$, dove $\bar{K} = 9$, mentre i prezzi di L e K sono rispettivamente $w = 3\text{€}$ e $r = 2\text{€}$. Si determinino analiticamente le funzioni del costo medio totale e del costo marginale dell'impresa e se ne fornisca un'adeguata rappresentazione grafica.

Soluzione:

La funzione di produzione, calcolata per $K = 9$, ha equazione $q = 18L^{0.5}$. Noti i prezzi dei fattori produttivi lavoro e capitale, per definire le funzioni di costo medio e di costo marginale dell'impresa è necessario conoscere la funzione di costo totale che fornisce l'ammontare di costo totale minimo

Soluzioni degli Esercizi

da sostenere per produrre una data quantità di output. Tale funzione è data da $CT = wK + rL$. Poiché dalla funzione di produzione risulta $L = \frac{1}{324}q^2$, sostituendo si ottiene

$$CT(q) = 3 \cdot \frac{1}{324}q^2 + 2 \cdot 9 = \frac{1}{108}q^2 + 18,$$

dove il costo fisso è $CF = 18\text{€}$. La funzione di costo medio è quindi

$$CM(q) = \frac{CT(q)}{q} = \frac{1}{108}q + \frac{18}{q},$$

mentre la funzione di costo marginale è

$$C'(q) = \frac{\partial CT(q)}{\partial q} = \frac{1}{54}q.$$

La rappresentazione grafica dà luogo a funzioni di costo medio e di costo marginale aventi la stessa forma di quelle rappresentate nella soluzione dell'ESEMPIO 3.5. Il costo marginale è rappresentato da una retta uscente dall'origine, mentre il costo medio ha "forma ad U" con un punto di minimo definito da

$$\frac{\partial CM}{\partial q} = 0 \Rightarrow -\frac{18}{q^2} + \frac{1}{108} = 0 \Rightarrow q^2 - 18 \cdot 108 = 0 \Rightarrow q_{\min} = \sqrt{18 \cdot 108} = 18\sqrt{6} \approx 44.0908$$

(la soluzione negativa $q = -18\sqrt{6} \approx -44.0908$ deve essere scartata).

Esercizio 3.12

In un mercato concorrenziale, un'impresa con funzione di costo totale di breve periodo data da $CT = CF + q^2$, dove CF indica il costo fisso e q è la quantità prodotta, vende i propri prodotti sul mercato al prezzo di $p = 40\text{€}$. Se ottiene un profitto pari a $\Pi = 10\text{€}$, a quanto ammonta il costo fisso?

Soluzione:

L'esercizio chiede di calcolare l'ammontare del costo fisso che sostiene un'impresa conoscendo la sua funzione di costo totale, il prezzo di vendita del prodotto ed il profitti che consegue. Ricordando che:

- $p = C'(q)$ definisce la quantità ottimale da produrre. In questo caso sia il prezzo, sia il costo marginale sono noti così come la quantità ottimale (q^*),
- $\Pi = pq^* - CT(q^*, CF)$ e la funzione di profitto. In questa funzione sono noti i profitti, la quantità ottimale da produrre e il prezzo. L'unica incognita è il costo fisso.

Risolviendo, si ottiene

$$p = C'(q) \Rightarrow 40 = 2q \Rightarrow q^* = 20.$$

Dalla funzione di profitto, emerge quindi che

$$\Pi = pq^* - CT(q^*, CF) \Rightarrow 10 = 40 \cdot 20 - (CF + 20^2) \Rightarrow CF = 800 - 400 - 10 = 390\text{€}.$$

Esercizio 3.13

Data la funzione di produzione $q = L^{1/2} + K^{1/2}$, si calcolino le funzioni di domanda condizionale dei fattori produttivi e la funzione di costo totale.

Soluzione:

Dalla condizione di equilibrio, risulta

$$|\text{SMST}(L, K)| = \frac{w}{r} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}L^{-1/2}}{\frac{1}{2}K^{-1/2}} = \frac{w}{r} \Rightarrow \frac{K^{1/2}}{L^{1/2}} = \frac{w}{r} \Rightarrow K^{1/2} = \frac{w}{r}L^{1/2},$$

dove w e r sono rispettivamente il costo del lavoro (salario) ed il costo del capitale. Sostituendo l'equazione del sentiero di espansione dell'impresa all'interno della funzione di produzione, si ottengono la domanda condizionale di lavoro data da

$$q = L^{1/2} + K^{1/2} = L^{1/2} + \frac{w}{r}L^{1/2} = \frac{w+r}{r}L^{1/2} \Rightarrow \tilde{L} = \frac{r^2}{(w+r)^2}q^2$$

e la domanda condizionale di capitale data da

$$\tilde{K} = \frac{w^2}{r^2}\tilde{L} = \frac{w^2}{r^2} \frac{r^2}{(w+r)^2}q^2 = \frac{w^2}{(w+r)^2}q^2.$$

La funzione di costo totale dell'impresa è quindi

$$\text{CT} = w\tilde{L} + r\tilde{K} = w \frac{r^2}{(w+r)^2}q^2 + r \frac{w^2}{(w+r)^2}q^2 = \frac{wr}{(w+r)^2}(w+r)q^2 = \frac{wr}{w+r}q^2.$$

Esercizio 3.14

Un'impresa opera nel lungo periodo con funzione di costo medio $\text{CM} = 7q$. Si calcoli la sua funzione di costo marginale.

Soluzione:

L'esercizio fornisce la funzione di costo medio e chiede di calcolare il costo marginale, dove:

1. il costo medio è dato dal rapporto tra costo totale e quantità,
2. il costo marginale è dato dalla derivata del costo totale fatta rispetto la quantità.

Dal punto 1. deriva che il costo totale è dato dal prodotto tra costo medio e quantità prodotta, cioè

$$\text{CT} = \text{CM} \cdot q = (7q)q = 7q^2.$$

A questo punto è immediato calcolare il costo marginale attraverso la derivata, quindi risulta

$$C' = \frac{\partial \text{CT}}{\partial q} = 14q.$$

Esercizio 3.15

La funzione di costo medio di un'impresa è data da $CM = \frac{100}{q} + 2q$, dove q è la quantità prodotta. Quanto costa all'imprenditore la produzione della 40^a unità prodotta?

Soluzione:

Dal costo medio è possibile passare al costo totale semplicemente moltiplicandolo per la quantità prodotta, quindi risulta

$$CT = CM \cdot q = 100 + 2q^2.$$

Il costo marginale è allora dato da

$$C' = \frac{\partial CT}{\partial q} = 4q.$$

La produzione della 40^a unità equivale al costo marginale calcolato in corrispondenza di $q = 40$, cioè $C'(40) = 4 \cdot 40 = 160\text{€}$.

Esercizio 3.16

Sia $CM = 2q^2 - 20q + 160$ la funzione di costo medio di una data impresa. Poiché nel lungo periodo non ci sono costi fissi, qual è la funzione di costo totale? Qual è la funzione di costo marginale? Qual è il valore minimo del costo marginale?

Soluzione:

La funzione di costo totale si ottiene moltiplicando per q il costo medio, quindi si ottiene

$$CT = CM \cdot q = 2q^3 - 20q^2 + 160q.$$

Derivando il costo totale rispetto q , si ottiene il costo marginale

$$C' = \frac{\partial CT}{\partial q} = 6q^2 - 40q + 160.$$

Questa funzione ammette un punto di minimo dato da

$$\frac{\partial C'}{\partial q} = 0 \Rightarrow 12q - 40 = 0 \Rightarrow q^* = \frac{10}{3}$$

per cui il valore minimo della funzione è

$$C'\left(\frac{10}{3}\right) = 6\left(\frac{10}{3}\right)^2 - 40\left(\frac{10}{3}\right) + 160 = \frac{200}{3} - \frac{400}{3} + 160 = \frac{280}{3} \approx 93.33\text{€}.$$

• ————— Esercizio 3.17 ————— •

Un'impresa produce con una tecnologia caratterizzata dalla funzione di costo totale $CT = 0.4q^3 - 2.4q^2 + 4q$. Si determini il livello di produzione q^* per cui i costi marginali sono uguali ai costi medi.

Soluzione:

Dato che la funzione di costo totale è una cubica, entrambe le funzioni di costo medio e di costo marginale sono quadratiche, quindi graficamente corrispondono a due parabole. In questo caso la funzione di costo marginale passa esattamente nel punto di minimo del costo medio. La soluzione consiste perciò nel minimizzare quest'ultima funzione. Dato che $CM = \frac{CT}{q} = 0.4q^2 - 2.4q + 4$, attraverso la condizione del primo ordine, si ottiene

$$\frac{\partial CM}{\partial q} = 0 \Rightarrow 0.8q - 2.4 = 0 \Rightarrow q^* = \frac{2.4}{0.8} = 3.$$

In alternativa, sapendo che $C' = \frac{\partial CT}{\partial q} = 1.2q^2 - 4.8q + 4$, dall'uguaglianza $CM = C'$ si ottiene

$$0.4q^2 - 2.4q + 4 = 1.2q^2 - 4.8q + 4 \Rightarrow 0.8q^2 - 2.4q = 0 \Rightarrow q^* = \frac{2.4}{0.8} = 3,$$

in quanto la soluzione $q^* = 0$ deve essere scartata.

• ————— Esercizio 3.18 ————— •

La funzione di produzione di un'impresa è $q = \sqrt{LK}$, dove il lavoro (L) ed il capitale (K) sono entrambi *input variabili*. L'impresa riceve una commessa per la produzione di q unità, che saranno pagate ognuna al prezzo $p = 100\text{€}$. L'imprenditore sa che, per accettare la commessa, deve sostenere costi fissi pari a $CF = 470\text{€}$, che il costo del lavoro è $w = 6\text{€}$, mentre quello del capitale è $r = 1.5\text{€}$. Qual è il livello minimo della commessa ($q = q_{\min}$) che permette di ottenere profitti non negativi?

Soluzione:

La funzione di produzione è di tipo Cobb-Douglas il cui saggio marginale di sostituzione tecnica è dato dall'intensità di capitale. Dalla condizione di equilibrio si ottiene quindi

$$|SMST(L, K)| = \frac{w}{r} \Rightarrow \frac{K}{L} = \frac{6}{1.5} \Rightarrow K = 4L.$$

Sostituendo all'interno della funzione di produzione, si ricava la domanda condizionale di lavoro data da

$$q = \sqrt{LK} = \sqrt{4L^2} = 2L \Rightarrow L = \frac{q}{2}$$

dalla quale deriva che la domanda condizionale di capitale è

$$\tilde{K} = 4\frac{q}{2} = 2q.$$

Da questi risultati, emerge che la funzione di costo totale dell'impresa è

$$CT = CF + w\tilde{L} + r\tilde{K} = 470 + 6\frac{q}{2} + 1.5 \cdot 2q = 470 + 6q.$$

Poiché la funzione di profitto dell'impresa è

$$\Pi = RT - CT = pq - (470 + 6q) = 100q - 470 - 6q = 94q - 470.$$

Il livello minimo della commessa che permette di ottenere profitti non negativi è quindi

$$94q - 470 \geq 0 \Rightarrow q \geq \frac{470}{94} \Rightarrow q_{\min} = 5.$$

Esercizio 3.19

Data la funzione di costo totale $CT(q) = 50q^2 + 6q$, indicando il prezzo (esogeno) di vendita del bene con p , si determini la funzione di offerta e la si rappresenti graficamente nella sua forma inversa. Si calcoli inoltre l'elasticità dell'offerta rispetto al prezzo.

Soluzione:

La funzione di offerta della singola impresa è definita dall'uguaglianza tra prezzo e costo marginale dell'impresa. Il costo marginale è dato dalla derivata della funzione di costo totale rispetto alla quantità prodotta, cioè

$$C' = \frac{\partial CT}{\partial q} = 100q + 6.$$

La funzione *inversa* di offerta è data dall'uguaglianza tra prezzo e costo marginale, quindi risulta

$$p = 100q + 6.$$

In un grafico con la quantità prodotta (q) in ascissa e il prezzo (p) in ordinata, la funzione di offerta è una retta con intercetta verticale pari a 6 e con coefficiente angolare pari a 100; risolvendo in q si ottiene la funzione di offerta

$$q = \frac{p-6}{100},$$

dove deve risultare $p > 6$ per far sì che l'impresa offra una quantità positiva sul mercato.

L'elasticità dell'offerta al prezzo è data da

$$\epsilon_{q,p} = \frac{\partial q}{\partial p} \frac{p}{q} = \frac{1}{100} \frac{p}{\frac{p-6}{100}} = \frac{p}{p-6}.$$

Esercizio 3.20

La funzione di costo marginale di un'impresa che opera in un mercato concorrenziale è data da $C' = 3q^2 - 8q + 16$; supponendo che non ci siano costi fissi, si determini la quantità di prodotto minima offerta dall'impresa ($q_{\min}$).

Soluzione:

La quantità di prodotto minima offerta dall'impresa è stabilita dal livello minimo di costo medio. Poiché non ci sono costi fissi, integrando il costo marginale, si ricava il costo totale, dato da

$$CT = \int C' dq = \int (3q^2 - 8q + 16) dq = \int 3q^2 dq - \int 8q dq + \int 16 dq = q^3 - 4q^2 + 16q.$$

Il costo medio è pertanto

$$CM = \frac{CT}{q} = q^2 - 4q + 16.$$

Attraverso la condizione del primo ordine è possibile determinare il suo punto di minimo che risulta essere

$$\frac{\partial CM}{\partial q} = 0 \Rightarrow 2q - 4 = 0 \Rightarrow q_{\min} = 2.$$

● ————— **Esercizio 3.21** ————— ●

Data la funzione di costo totale $CT(q) = 50q^2 + 6q$, indicando con p il prezzo (esogeno) di vendita del bene, si calcoli la funzione di offerta e la si rappresenti graficamente nella sua forma inversa. Sapendo che il prezzo è $p = 106\text{€}$, si calcoli inoltre il profitto dell'impresa.

Soluzione:

Dati i risultati dell'Esercizio 3.19, se il prezzo è $p = 106\text{€}$, la produzione è pari a $q = \frac{106 - 6}{100} = 1$. Il profitto dell'impresa è dato dalla differenza tra ricavi totali e costi totali, entrambi calcolati per $q = 1$, quindi risulta

$$\Pi(1) = RT(1) - CT(1) = 106 \cdot 1 - (50 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1) = 106 - 56 = 50\text{€}.$$

L'imprenditore ottiene un profitto massimo pari a 50€.

● ————— **Esercizio 3.22** ————— ●

In riferimento all'ESEMPIO 3.9, si assuma $\alpha = 0.5$, che l'impresa ha un costo fisso pari a $CF = 20\text{€}$ e che il salario orario sia pari a $w = 1\text{€}$. Si scriva la funzione di offerta dell'impresa e la si rappresenti graficamente nella forma inversa. Si calcoli il profitto nel caso in cui il prezzo di vendita sia $p = 10\text{€}$.

Soluzione:

La funzione di offerta dell'impresa nel caso in cui $CF = 20\text{€}$, $w = 1\text{€}$ e valga $\alpha = 0.5$ è basata sull'eguaglianza tra prezzo e costo marginale il quale è stato già calcolato nell'ESEMPIO 3.9; sostituendo i valori di α e w , si ottiene quindi

$$C' = 2q.$$

Dato che il prezzo deve essere uguale al costo marginale, risulta

$$p = 2q \Rightarrow q^* = \frac{p}{2}$$

che definisce la funzione di offerta (la relazione tra quantità ottimale e prezzo di vendita del prodotto).

All'interno di un piano cartesiano con la quantità offerta in ascissa e con il prezzo in ordinata, la rappresentazione grafica della funzione inversa di offerta, di equazione $p = 2q$, è data semplicemente da una retta che passa dall'origine ed ha coefficiente angolare pari a 2. Il profitto dell'impresa è dato da

$$\Pi = pq^* - CT(q^*),$$

dove CT è già stato calcolato nell'ESEMPIO 2.26. Sostituendo w , CF , e α in $CT(q^*)$, si ottiene

$$CT = q^{*2} + 20.$$

In corrispondenza del prezzo $p = 10\text{€}$ vale $q^* = 5$ che, sostituito nella funzione di costo totale, dà luogo alla seguente funzione di profitto

$$\Pi = 10 \cdot 5 - 45 = 5\text{€}.$$

Esercizio 3.23

La funzione di produzione di un'impresa che ha come obiettivo la massimizzazione del profitto è di tipo Cobb-Douglas con equazione $q = L^{1/3}K^{1/3}$. Si determini la quantità (q^*) prodotta dall'impresa nel caso in cui il prezzo dell'output sia $p = 9\text{€}$, il costo del lavoro sia $w = 0.6\text{€}$ e il costo del capitale sia $r = 1\text{€}$.

Soluzione:

Poiché la funzione di produzione è di tipo Cobb-Douglas dove i coefficienti tecnologici sono tra loro uguali, il saggio marginale di sostituzione tecnica è pari all'intensità di capitale. Dalla condizione di equilibrio risulta perciò

$$|SMST(L, K)| = \frac{w}{r} \Rightarrow \frac{K}{L} = \frac{0.6}{1} \Rightarrow K = \frac{3}{5}L.$$

Sostituendo all'interno della funzione di produzione, si ottiene la domanda condizionale di lavoro che risulta essere

$$q = L^{1/3}K^{1/3} = L^{1/3}\left(\frac{3}{5}L\right)^{1/3} = \left(\frac{3}{5}\right)^{1/3}L^{2/3} \Rightarrow \bar{L} = \sqrt{\frac{5}{3}}q^{3/2}.$$

La domanda condizionale di capitale è quindi

$$\bar{K} = \frac{3}{5}\bar{L} = \frac{3}{5}\sqrt{\frac{5}{3}}q^{3/2} = \sqrt{\frac{3}{5}}q^{3/2}.$$

La funzione di profitto dell'impresa è perciò

$$\Pi = RT - CT = pq - (w\tilde{L} - r\tilde{K}) = 9q - 0.6\sqrt{\frac{5}{3}}q^{3/2} - \sqrt{\frac{3}{5}}q^{3/2} = 9q - 2\sqrt{\frac{3}{5}}q^{3/2}.$$

La quantità ottimale per l'impresa è ottenuta attraverso la condizione del primo ordine, quindi risulta

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0 \Rightarrow 9 - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}q^{1/2} = 0 \Rightarrow 3 - \sqrt{\frac{5}{3}}q^{1/2} = 0 \Rightarrow q^* = 9\frac{5}{3} = 15.$$

● ————— **Esercizio 3.24** ————— ●

Si determini il valore del costo totale di un'impresa con funzione di produzione di tipo CES $q = 2(\sqrt{L} + \sqrt{K})^2$, dove L e K sono i fattori produttivi il cui costo è dato rispettivamente da $w = 5\text{€}$ e $r = 1\text{€}$. L'impresa opera nel breve periodo utilizzando il capitale in quantità fissa pari a $\tilde{K} = 49$ e deve fare fronte ad un ordinativo di $q = 338$ unità di prodotto.

Soluzione:

Dato che l'impresa utilizza $\tilde{K} = 49$ unità di capitale e produce $q = 338$ unità di prodotto, sostituendo nella funzione di produzione, si ottiene

$$2(\sqrt{L} + \sqrt{49})^2 = 338 \Rightarrow \sqrt{L} + 7 = \sqrt{\frac{338}{2}} \Rightarrow L^* = (\sqrt{169} - 7)^2 = (13 - 7)^2 = 36.$$

La funzione di costo totale dell'impresa è

$$CT = wL^* + r\tilde{K} = 5 \cdot 36 + 49 = 229\text{€}.$$

● ————— **Esercizio 3.25** ————— ●

Un'impresa opera con funzione di produzione $q = \sqrt{2L + 2K}$, dove i fattori produttivi L e K sono in rapporto 1 a 1. Sapendo che non esistono costi fissi e che il prezzo di vendita del prodotto (q), il costo del lavoro ed il costo del capitale sono rispettivamente $p = 2\text{€}$, $w = 1.5\text{€}$ e $r = 0.5\text{€}$, si calcoli il costo totale (CT) sostenuto dall'impresa nella condizione di massimo profitto.

Soluzione:

Se i fattori produttivi L e K sono in rapporto 1 a 1, significa $L = K$, quindi risulta

$$q = \sqrt{4L} = 2\sqrt{L} \Rightarrow L^* = K^* = \frac{q^2}{4}.$$

La funzione di profitto dell'impresa è

$$\Pi = RT - CT = pq - (wL^* + rK^*) = 2q - 1.5\frac{q^2}{4} - 0.5\frac{q^2}{4} = 2q - \frac{q^2}{2}.$$

Applicando la condizione del primo ordine, si ottiene la quantità ottimale prodotta dall'impresa che risulta essere

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0 \Rightarrow 2 - q = 0 \Rightarrow q^* = 2.$$

In corrispondenza di questa quantità il costo totale sostenuto dall'impresa ammonta a

$$CT(2) = 2 \cdot 2 - \frac{2^2}{2} = 2€.$$

• **Esercizio 3.26** •

L'amministratore delegato dei cantieri navali di Ancona ha una funzione di produzione relativa alle barche a vela di piccola stazza data da $q = \frac{\sqrt{KL}}{550}$. I prezzi del lavoro e del capitale sono $w = r = 1€$. Si supponga che egli riceva una commessa per la fornitura di un certo numero di barche a vela di piccola stazza; qual è il prezzo unitario minimo per barca ($p_{\min}$) che spinge ad accettare la commessa?

Soluzione:

Poiché la funzione di produzione è di tipo Cobb-Douglas con coefficienti tecnici tra loro uguali, il saggio marginale di sostituzione tecnica è pari all'intensità di capitale. Dalla condizione di equilibrio, risulta

$$|SMST(L, K)| = \frac{w}{r} \Rightarrow \frac{K}{L} = 1 \Rightarrow K = L.$$

Sostituendo all'interno della funzione di produzione, si ottengono le domande condizionale di entrambi i fattori produttivi date da

$$q = \frac{\sqrt{L^2}}{550} = \frac{L}{550} \Rightarrow \tilde{L} = 550q,$$

quindi $\tilde{K} = 550q$. La funzione di profitto dell'impresa è

$$\Pi = pq - (w\tilde{L} + r\tilde{K}) = pq - 2 \cdot 550q = (p - 1100)q.$$

Il prezzo unitario minimo per barca che spinge ad accettare la commessa è quello che garantisce un profitto non negativo, quindi deve risultare

$$\Pi \geq 0 \Leftrightarrow p \geq 1100€ \Rightarrow p_{\min} = 1100€.$$

• **Esercizio 3.27** •

Data la funzione di produzione $q = L^{2/3} + K^{2/3} + 2(LK)^{1/3}$, siano $r = 1€$ il costo del capitale, p il prezzo di vendita del prodotto e w il salario unitario. Si determinino:

1. il tipo di rendimenti di scala;
2. la funzione di domanda condizionale di fattori produttivi $L^*(\tilde{q}, w)$ e $K^*(\tilde{q}, w)$;
3. la funzione di costo totale;
4. la funzione di domanda non condizionale di fattori produttivi: $L^*(p, w)$ e $K^*(p, w)$.

Soluzione:

1. Al fine di determinare il tipo di rendimenti di scala, occorre moltiplicare tutti i fattori produttivi della funzione di produzione per una quantità $t > 1$ e confrontare la produzione ottenuta con quella di partenza, cioè valutare il segno della disuguaglianza

$$q(tL, tK) \lesseqgtr t q(L, K).$$

Se vale il segno di maggioranza, i rendimenti di scala sono crescenti, se vale il segno uguaglianza i rendimenti di scala sono costanti e, se vale il segno di minoranza, i rendimenti di scala sono decrescenti. Applicando questa definizione alla funzione di produzione del testo, si ottiene

$$\begin{aligned} (tL)^{2/3} + (tK)^{2/3} + 2[(tL)(tK)]^{1/3} &\lesseqgtr t [L^{2/3} + K^{2/3} + 2(LK)^{1/3}] \\ t^{2/3} [L^{2/3} + K^{2/3} + 2(LK)^{1/3}] &\lesseqgtr t [L^{2/3} + K^{2/3} + 2(LK)^{1/3}]. \end{aligned}$$

Dato che, per $t > 1$, risulta $t^{2/3} < t$, i rendimenti di scala sono decrescenti (quindi la funzione di costo medio è crescente rispetto la quantità prodotta).

2. La domanda condizionale di fattori produttivi scaturisce come soluzione del sistema (3.5) del testo, il quale richiede il calcolo del valore assoluto del saggio marginale di sostituzione tecnica tra K e L che risulta essere

$$\begin{aligned} |\text{SMST}(L, K)| &= \frac{q'_L}{q'_K} \\ &= \frac{\frac{2}{3} \left(\frac{1}{L^{1/3}} + \frac{K^{1/3}}{L^{2/3}} \right)}{\frac{2}{3} \left(\frac{1}{K^{1/3}} + \frac{L^{1/3}}{K^{2/3}} \right)} \\ &= \frac{L^{2/3} + (LK)^{1/3}}{\frac{L}{K^{2/3} + (LK)^{1/3}}} \\ &= \frac{K}{L} \frac{L^{1/3} L^{1/3} + K^{1/3} L^{1/3}}{L^{1/3} + K^{1/3}} \\ &= \left(\frac{K}{L} \right)^{2/3}. \end{aligned}$$

Impostando il sistema (2.18) con $r = 1$, si ottiene

$$\begin{cases} \left(\frac{K}{L} \right)^{2/3} = w \\ \bar{q} = L^{2/3} + K^{2/3} + 2(LK)^{1/3}. \end{cases}$$

Dalla prima equazione è agevole calcolare il sentiero di espansione dell'impresa dato da

$$K = w^{3/2} L.$$

Sostituendo all'interno della seconda equazione, si ottiene

$$\bar{q} = L^{2/3} + (w^{3/2} L)^{2/3} + 2(L w^{3/2} L)^{1/3} = L^{2/3} + w L^{3/2} + 2w^{1/2} L^{2/3} = L^{2/3} (1 + w + 2\sqrt{w}) = L^{2/3} (1 + \sqrt{w})^2.$$

La funzione di domanda condizionale di lavoro è quindi

$$\tilde{L}(q, w) = \frac{q^{3/2}}{(1 + \sqrt{w})^3} = \left(\frac{\sqrt{q}}{1 + \sqrt{w}} \right)^3;$$

sostituendo all'interno del sentiero di espansione dell'impresa si ricava la domanda condizionale di capitale data da

$$\tilde{K}(q, w) = w^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\sqrt{q}}{1 + \sqrt{w}} \right)^3 = \left(\frac{\sqrt{w}}{1 + \sqrt{w}} \sqrt{q} \right)^3$$

3. Nota la domanda condizionale di entrambi i fattori produttivi, è possibile calcolare la funzione di costo totale

$$CT(q, w) = w\tilde{L}(q, w) + r\tilde{K}(q, w) = w \left(\frac{\sqrt{q}}{1 + \sqrt{w}} \right)^3 + r \left(\frac{\sqrt{q}\sqrt{w}}{1 + \sqrt{w}} \right)^3.$$

Dato che $r = 1\text{€}$, mettendo in evidenza i termini comuni ai due addendi, si ottiene

$$CT(q, w) = w \left(\frac{\sqrt{q}}{1 + \sqrt{w}} \right)^3 (1 + \sqrt{w}) = \frac{w}{(1 + \sqrt{w})^2} q^{3/2}.$$

4. L'imprenditore conosce la sua funzione di costo totale la quale presenta rendimenti di scala decrescenti. La funzione di offerta, cioè la quantità (q) che è ottimale produrre per ogni dato prezzo di vendita dell'output e per i prezzi dei fattori produttivi, è data dalla massimizzazione della seguente funzione di profitto

$$\Pi = pq - CT(q, w) = pq - \frac{w}{(1 + \sqrt{w})^2} q^{3/2}.$$

L'obiettivo di massimo profitto è raggiunto scegliendo la quantità ottimale (q^*) tale per cui risulta

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{3}{2} \frac{w}{(1 + \sqrt{w})^2} \sqrt{q^*}.$$

Questa equazione è quella *inversa* di offerta di prodotto. La funzione di offerta è facilmente ottenibile risolvendo in q^* , quindi si ottiene

$$q^*(p, w) = \left(\frac{2}{3} \frac{p}{w} \right)^2 (1 + \sqrt{w})^4$$

che definisce la quantità che è ottimale produrre nell'impresa per ogni possibile livello di prezzo di vendita del prodotto e del costo del lavoro. Per produrre la quantità q^* , l'impresa avrà bisogno di fattori produttivi in una quantità dipendente dalle funzioni di domanda condizionale di lavoro $\tilde{L}$

e capitale $\tilde{K}$ calcolate per $q = q^*$. Dato $\tilde{L}(q, w) = \left(\frac{\sqrt{q}}{1 + \sqrt{w}} \right)^3$, sostituendo si ottiene la funzione di domanda non condizionale del fattore lavoro

$$L^*(p, w) = \left[\frac{\sqrt{\left(\frac{2}{3} \frac{p}{w} \right)^2 (1 + \sqrt{w})^4}}{1 + \sqrt{w}} \right]^3 = \left[\frac{2}{3} \frac{p}{w} (1 + \sqrt{w}) \right]^3.$$

Utilizzando la stessa metodologia, si definisce la domanda non condizionale del capitale

$$K^*(p, w) = \left[\frac{2}{3} \frac{p}{\sqrt{w}} (1 + \sqrt{w}) \right]^3.$$

Esercizio 3.28

Sia $q = \min\{L^{1/2}, K^{1/2}\}$, si calcoli l'elasticità dell'utilizzo del lavoro rispetto al costo del capitale ($\varepsilon_{L,r}$), l'elasticità dell'utilizzo del capitale al suo costo ($\varepsilon_{K,r}$) e l'elasticità del costo totale al costo del capitale ($\varepsilon_{CT,r}$) sapendo che $w = 1\text{€}$ e $p = 20\text{€}$.

Soluzione:

La funzione di produzione indicata nel testo implica che i fattori lavoro e capitale siano *perfettamente complementari*, infatti la quantità prodotta dipende soltanto dal fattore utilizzato in minore quantità tra i due (si pensi all'esempio dell'autista e dell'autocarro nel testo). In casi come questi è razionale per l'impresa utilizzare la stessa quantità dei due fattori produttivi. Poiché deve valere $L = K$, cioè vuol dire che la funzione di produzione può essere semplicemente scritta come $q = \sqrt{L}$ (oppure, analogamente, $q = \sqrt{K}$ che ovviamente è la stessa scrittura dato che $K = L$).

Dati $p = 20\text{€}$ e $w = 1\text{€}$, il profitto dell'impresa può essere scritto come

$$\Pi = 20q - (wL + rK) = 20\sqrt{L} - (1+r)L,$$

dove la funzione di produzione e quella di costo totale sono state esplicitate per il fattore produttivo lavoro (L). Massimizzando il prodotto rispetto a L (derivata prima posta uguale a zero) dà luogo a

$$\frac{\partial \Pi}{\partial L} = 0 \Rightarrow \frac{10}{\sqrt{L}} - 1 - r = 0 \Rightarrow 10 = (1+r)\sqrt{L} \Rightarrow L^* = \left(\frac{10}{1+r}\right)^2.$$

Naturalmente, dato che $K = L$, deve valere anche $K^* = \left(\frac{10}{1+r}\right)^2$; di conseguenza il costo totale che deve sostenere l'imprenditore per produrre il bene q , sarà

$$CT = wL^* + rK^* = (1+r)L^* = (1+r)\left(\frac{10}{1+r}\right)^2 = \frac{100}{1+r}.$$

L'elasticità dell'utilizzo del lavoro rispetto al costo del capitale è data da

$$\varepsilon_{L,r} = \frac{\partial L}{\partial r} \frac{r}{L} = -\frac{200}{(1+r)^3} \frac{r}{\frac{100}{(1+r)^2}} = -2 \frac{r}{1+r}.$$

Ovviamente risulta $\varepsilon_{K,r} = \varepsilon_{L,r}$ in quanto vale l'uguaglianza $K = L$.

L'elasticità del costo totale rispetto al costo del capitale è invece data da

$$\varepsilon_{CT,r} = \frac{\partial CT}{\partial r} \frac{r}{CT} = \frac{-100}{(1+r)^3} \frac{r}{\frac{100}{1+r}} = -\frac{r}{1+r}.$$

Esercizio 3.29

La funzione di produzione di un'impresa è di tipo Cobb-Douglas $q = K^{2/3}L^{1/6}$. L'impresa deve produrre $q = \bar{q}$ unità di prodotto al minor costo totale possibile. Il costo del lavoro è pari a $w = 1\text{€}$, mentre il costo del capitale è pari a $r = 5\text{€}$.

Dopo aver calcolato i valori ottimali di K e L (condizionali ad un livello di produzione pari a $\bar{q}$), si calcoli la funzione di costo totale di lungo periodo. Si calcolino inoltre le funzioni di costo medio e di costo marginale.

Qual è la produzione ottimale dell'impresa se il prezzo è fissato a $p = 1.6\text{€}$? Quante ore-lavoro e ore-capitale utilizza?

Soluzione:

Al fine di calcolare la domanda condizionale dei fattori produttivi lo svolgimento dell'esercizio è basato sul sistema (2.18) che richiede il calcolo del valore assoluto del saggio marginale di sostituzione tecnica dato da

$$|\text{SMST}(L, K)| = \frac{q'_L}{q'_K} = \frac{\frac{1}{6} K^{2/3} L^{-5/6}}{\frac{2}{3} K^{-1/3} L^{1/6}} = \frac{1}{4} \frac{K}{L}.$$

Per $r = 5\text{€}$ e $w = 1\text{€}$ il sistema (2.18) può essere scritto come

$$\begin{cases} \frac{1}{4} \frac{K}{L} = \frac{1}{5} \\ \bar{q} = K^{2/3} L^{1/6}. \end{cases}$$

La prima equazione, risolta in K , definisce il sentiero di espansione dell'impresa dato da

$$K = \frac{4}{5} L$$

che, sostituito nella seconda equazione del sistema, determina l'ammontare di produzione

$$\bar{q} = \left(\frac{4}{5} L\right)^{2/3} L^{1/6} = 0.8^{2/3} L^{5/6} \approx 0.8618 L^{5/6}.$$

La domanda condizionale del fattore lavoro è quindi

$$\tilde{L}(q) = (0.8^{-2/3})^{6/5} \bar{q}^{6/5} = 0.8^{-4/5} \bar{q}^{6/5} \approx 1.1954 \bar{q}^{6/5}$$

che sostituita nel sentiero di espansione dell'impresa fornisce la domanda condizionale di capitale

$$\tilde{K}(q) = \frac{4}{5} \tilde{L}(q) = 0.8 \cdot 0.8^{-4/5} \bar{q}^{6/5} = 0.8^{1/5} \bar{q}^{6/5} \approx 0.9564 \bar{q}^{6/5}.$$

Il costo totale è dato da

$$\text{CT}(q) = w\tilde{L} + r\tilde{K} \approx 1.1954 \bar{q}^{6/5} + 5 \cdot 0.9564 \bar{q}^{6/5} \approx 5.9772 \bar{q}^{6/5}.$$

I corrispondenti costo medio e costo marginale sono

$$\text{CM}(q) = \frac{\text{CT}(q)}{q} \approx 5.9772 q^{1/5} \quad \text{e} \quad C'(q) = \frac{\partial \text{CT}(q)}{\partial q} \approx \frac{6}{5} 5.9772 q^{1/5} \approx 7.1726 q^{1/5}.$$

L'uguaglianza tra il prezzo ed il costo marginale definisce la quantità ottimale da produrre la quale ammonata a

$$p = C'(q) \Rightarrow 1.6 \approx 7.1726 q^{1/5} \Rightarrow q^{1/5} \approx \frac{1.6}{7.1726} \Rightarrow q^* \approx 1.3644^5 \approx 4.7299.$$

Sostituendo la quantità ottimale (q^*) in $\tilde{L}$ e $\tilde{K}$, si ottengono le funzioni di domanda non condizionali di fattori produttivi date da

$$\begin{cases} L^* \approx 1.1954 q^{*6/5} \approx 1.1954 \cdot 4.7299^{6/5} \approx 7.7150 \\ K^* \approx 0.9564 q^{*6/5} \approx 0.9564 \cdot 4.7299^{6/5} \approx 6.1725 \end{cases}$$

Esercizio 3.30

Data la funzione di produzione $q = AL^\alpha$, dato il prezzo di vendita del bene $p = 1\text{€}$ ed il costo del lavoro (w), si calcoli l'elasticità della domanda di lavoro rispetto al salario e si dica di quanto varia la domanda di lavoro se il salario aumentasse del 3%, sapendo che $\alpha = 1/3$.

Soluzione:

Nota la funzione di produzione, è possibile calcolare la funzione di domanda di lavoro che è data dall'uguaglianza tra produttività marginale in valore del lavoro e salario, cioè

$$p \frac{\partial q}{\partial L} = w \Rightarrow pA\alpha L^{\alpha-1} = w$$

che, risolta in L , dà luogo alla funzione di domanda di lavoro:

$$L^{\alpha-1} = \frac{w}{A\alpha p} \Rightarrow L^{1-\alpha} = \frac{A\alpha p}{w} \Rightarrow L = \left(\frac{A\alpha p}{w} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Applicando la trasformazione logaritmica a questa funzione di domanda si ottiene

$$\ln(L) = \frac{1}{1-\alpha} \ln(A\alpha p) - \frac{1}{1-\alpha} \ln w.$$

Poiché questa funzione è loglineare (isoelastica rispetto al salario), l'elasticità della domanda di lavoro al salario è data da

$$\epsilon_{L,w} = \frac{\partial \ln L}{\partial \ln w} = -\frac{1}{1-\alpha}.$$

Se $\alpha = \frac{1}{3}$, vale $\epsilon_{L,w} = -\frac{3}{2} = -1.5$.

Se il salario aumentasse del 3%, l'utilizzo del lavoro dovrebbe quindi ridursi del 4.5%. Per ottenere questo risultato, basta ricordare che l'elasticità può essere anche scritta anche come

$$\epsilon_{L,w} = \frac{\frac{\partial L}{L}}{\frac{\partial w}{w}};$$

Se $\frac{\partial w}{w} = 3\%$ e $\frac{\partial L}{L} = -4.5\%$, si ottiene immediatamente $\epsilon_{L,w} = \frac{4.5\%}{3\%} = -1.5$.

Esercizio 3.31

Un'impresa opera con la funzione di produzione di breve periodo $q = 100L - L^2$, dove q rappresenta il prodotto e L il numero di lavoratori. Sia w il salario per occupato e p il prezzo del bene prodotto dall'impresa.

Sapendo che l'impresa opera in modo da massimizzare i profitti, si calcoli l'elasticità della domanda di lavoro rispetto al salario reale, definito dal rapporto w/p .

Soluzione:

Soluzioni degli Esercizi

Per calcolare l'elasticità della domanda di lavoro al salario occorre conoscere la funzione di domanda di lavoro che è stabilita dall'uguaglianza tra valore della produttività marginale e salario, cioè

$$p \frac{\partial q}{\partial L} \Rightarrow p(100 - 2L) = w$$

dalla quale si ottiene

$$L^* = 50 - \frac{w}{2p} = 50 - \frac{\omega}{2},$$

dove, al fine di semplificare la notazione, il salario è stato posto pari a $\omega = \frac{w}{p}$. L'elasticità della domanda di lavoro al salario reale è quindi pari a

$$\varepsilon_{L,w/p} = \frac{\partial L}{\partial \omega} \frac{\omega}{L} = \frac{1}{2} \frac{\omega}{50 - \frac{1}{2}\omega} = -\frac{\omega}{100 - \omega} = -\frac{w/p}{100 - w/p}.$$

Esercizio 3.32

Gli “ausiliari del traffico” che sono incaricati di multare le auto in divieto di sosta nel Comune infliggono in un mese un numero di multe (M) che dipende dalla funzione $M = 100\sqrt{n}$, dove n il numero degli ausiliari del traffico.

Sapendo che ognuno di loro costa 400€ al mese, che ogni multa è pari a 64€ e che il Comune vuole massimizzare i profitti, si calcoli il numero ottimale di ausiliari del traffico da assumere e il profitto massimo che il Comune riesce ad ottenere dalle multe.

Soluzione:

In questo Esercizio il Comune si comporta come se fosse un'impresa: assumendo che gli ausiliari del traffico (utilizzando lavoro, n) “producano il bene” multe (M) le quali hanno valore unitario pari a 64€ e che ogni ausiliario costi 400€, il profitto che il comune ottiene dalle multe è allora dato da

$$\Pi = 64M - 400n,$$

dove M rappresenta il numero di multe e n il numero di ausiliari del traffico. Il testo fornisce la relazione che lega il numero di multe al numero di ausiliari, quindi la funzione di profitto del Comune è

$$\Pi = 64 \cdot 100\sqrt{n} - 400n = 6400\sqrt{n} - 400n.$$

Il comune sceglie n in modo da massimizzare il proprio profitto, quindi risulta

$$\frac{\partial \Pi}{\partial n} = 0 \Rightarrow \frac{3200}{\sqrt{n}} - 400 = 0 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{3200}{400} \Rightarrow \sqrt{n} = 8 \Rightarrow n^* = 64$$

Per il Comune è ottimale assumere 64 ausiliari.

Si noti che lo stesso risultato poteva essere ottenuto impostando la relazione

$$p \frac{\partial M}{\partial n} = w \Rightarrow \frac{50p}{\sqrt{n}} = w \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{50p}{w} \Rightarrow n^* = \frac{50^2 \cdot 64^2}{400^2} = 64.$$

Esercizio 3.33

Data la funzione di produzione di breve periodo $q = 30L^{1/2}$, sia il prezzo del bene $p = 1\text{€}$ ed il salario $w = 2\text{€}$. Si calcolino il livello di occupazione (L) e della produzione (q). Si determini inoltre il costo totale nell'ipotesi che ci sia un costo fisso pari a $CF = 3\text{€}$, l'ammontare di profitto dell'impresa e si rappresenti graficamente la funzione di profitto in funzione della quantità prodotta (q).

Soluzione:

La condizione di equilibrio è data dall'uguaglianza tra produttività marginale del lavoro e salario reale, cioè

$$q'_L = \frac{w}{p} \Rightarrow \frac{1}{2} 30L^{-1/2} = 2 \Rightarrow \frac{15}{L^{1/2}} = 2 \Rightarrow L^* = 7.5^2 = 56.25.$$

In corrispondenza del livello di occupazione L^* , la produzione ammonta a

$$q^* = 30\sqrt{L^*} = 30 \cdot 7.5 = 225.$$

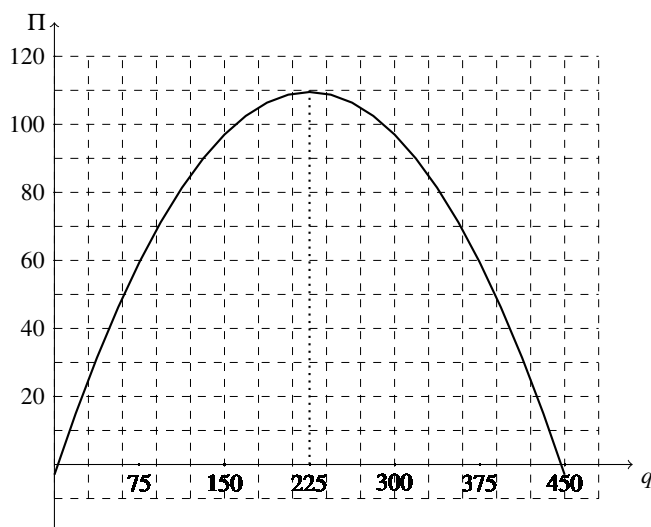
Il costo totale dell'impresa è

$$CT = CF + wL^* = 3 + 2 \cdot 56.25 = 115.50\text{€}.$$

La funzione di profitto, rappresentata nel seguente grafico, ha equazione

$$\Pi = RT - CT = pq - (CF + wL) = q - 3 - 2 \frac{q^2}{900} = -\frac{q^2}{450} + q - 3,$$

in quanto, dalla funzione di produzione, risulta $L = \frac{q^2}{900}$.



Esercizio 3.34

Si rappresenti graficamente l'equilibrio di un'impresa disegnando nello spazio con L in ascissa e K in ordinata un isoquanto di produzione e una retta di isocosto. Si costruisca un grafico appropriato per ciascuno dei seguenti casi:

- aumento del costo del capitale,
- riduzione del costo del capitale,
- riduzione del costo del lavoro.

Si stabilisca infine se i fattori produttivi sono sostituti oppure complementari (suggerimento: non esistono risposte univoche relative a sostituibilità o complementarità tra fattori produttivi perché dipendono dalla curvatura degli isoquanti di produzione che sono stati disegnati).

Soluzione:

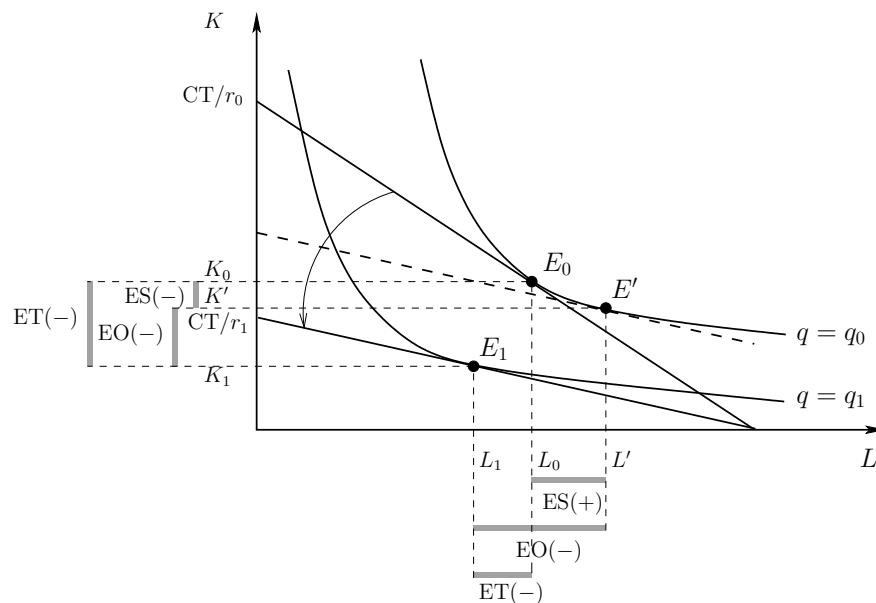
Il testo dell'esercizio richiede la rappresentazione grafica dell'effetto output e dell'effetto sostituzione in tre differenti contesti.

I tre grafici successivi considerano sempre le scelte di un imprenditore tra i fattori produttivi lavoro e capitale, e sono costruiti sulla base della stessa simbologia. In ognuno dei tre grafici è rappresentata la situazione iniziale, dove l'utilizzo dei fattori è indicato dal punto E_0 , e la situazione successiva al cambiamento dei prezzi dei fattori, con utilizzo dei fattori indicato dal punto E_1 .

Il punto E' è invece rappresentato per scindere l'effetto output dall'effetto sostituzione. Per definire le coordinate del punto C si rappresenta un isocosto parallelo all'isocosto successivo alla variazione del prezzo del fattore e tangente all'isoquante precedente la variazione del prezzo.

- aumento del costo del capitale da r_0 a r_1 .

L'aumento del costo del capitale fa ruotare la retta di isocosto verso l'interno (rotazione in senso orario). Si ricordi che tale retta ha equazione $K = \frac{CT}{r} - \frac{w}{r}L$. Supponendo che la nuova retta di isocosto sia quella tratteggiata grigia, si osservi la seguente figura.



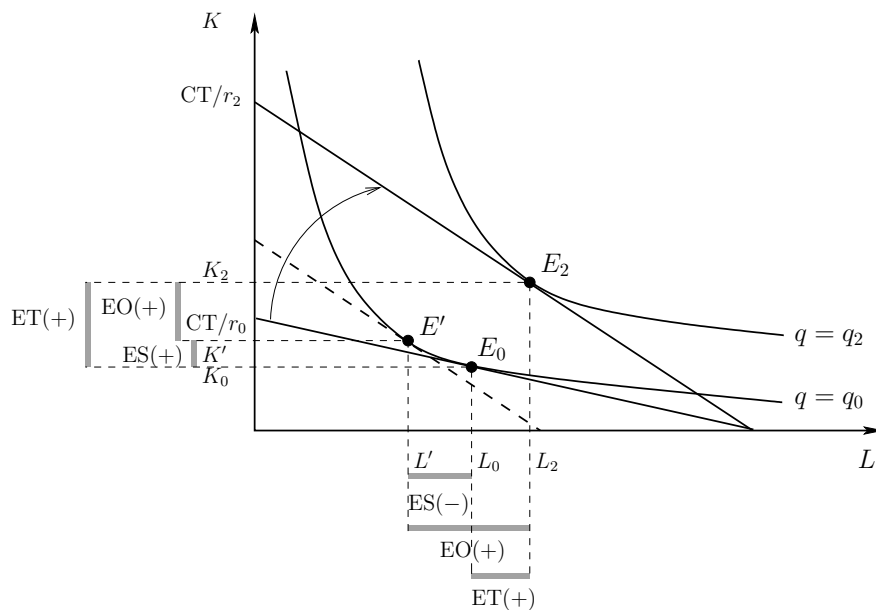
L'impresa, se volesse continuare a produrre la quantità $q = q_0$, cioè intendesse rimanere sullo stesso isoquanto di produzione, dovrebbe sostenere un costo totale maggiore ma, dato il nuovo prezzo relativo, avrebbe convenienza a posizionarsi sul punto E' . Il passaggio dal punto E_0 al punto E' individua quindi l'*effetto sostituzione* (ES).

Ma non ci sono motivi per cui, dato l'aumento del costo del capitale, l'impresa trovi conveniente produrre la stessa quantità. A costi dei fattori più alti, la quantità ottimale si deve ridurre. Supponendo che ai nuovi prezzi dei fattori produttivi l'impresa trovi conveniente produrre $q = q_1$, utilizzando le quantità di fattori produttivi definite dal punto E_1 . L'*effetto output* (EO) è rappresentato quindi nel passaggio dal punto E' al punto E_1 . Infine l'effetto totale (ET) è identificato dal passaggio dal punto di equilibrio iniziale E_0 a quello di equilibrio finale E_1 .

Si noti che nel caso rappresentato in figura lavoro e capitale sono complementari in quanto l'aumento del costo del capitale ha determinato un effetto totale negativo, cioè ha condotto alla diminuzione dell'utilizzo del lavoro. Si tenga presente che sono possibili altre rappresentazioni grafiche, lavoro e capitale potrebbero essere sostituti (l'utilizzo del lavoro potrebbe cioè aumentare quando il costo del capitale aumenta, cioè l'effetto totale per il lavoro potrebbe essere positivo).

- riduzione del costo del capitale da r_0 a r_2 .

La figura seguente rappresenta il caso della riduzione del costo del capitale nel quale la retta di isocosto ruota in senso antiorario facendo perno sull'intercetta orizzontale. L'effetto di sostituzione (ES) è valutato a parità di produzione (sempre sull'isoquanto corrispondente alla produzione $q = q_0$), mentre l'effetto output (EO) è valutato nel passaggio dal punto fittizio E' al punto di equilibrio finale E_2 . Infine, l'effetto totale (ET) considera la produzione ottimale dell'impresa dopo la riduzione del prezzo del capitale ($q_2 > q_0$).

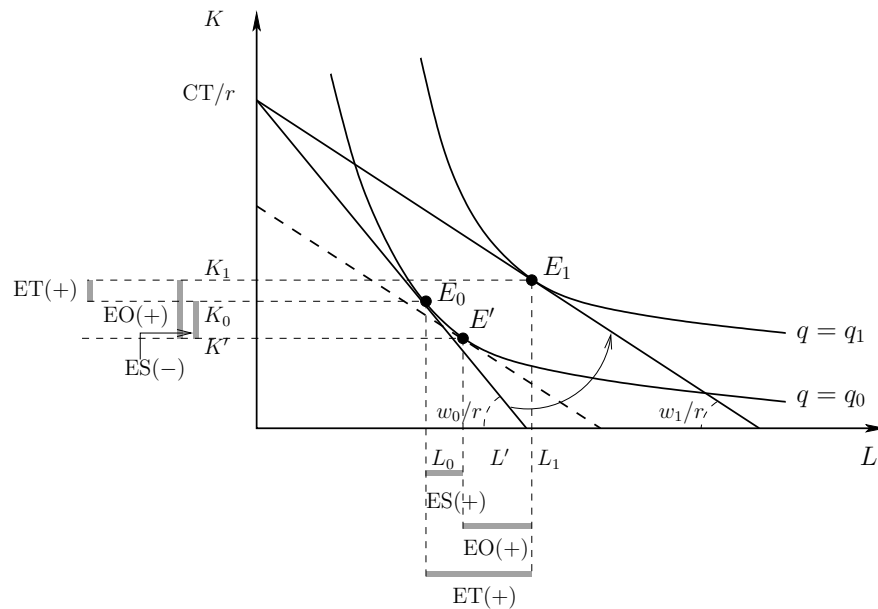


Si noti che, per come è stata rappresentata la figura, i due fattori produttivi sono sostituti, perchè al ridursi del costo del capitale l'utilizzo del lavoro è aumentato ($L_2 > L_0$). Questo risultato non è valido in generale, ma dipende da come sono stati costruiti gli isoquanti di produzione. Un disegno nel quale fosse evidenziato un effetto totale negativo per l'utilizzo del lavoro sarebbe andato ugualmente benissimo come soluzione dell'esercizio.

Soluzioni degli Esercizi

- riduzione del costo del lavoro da w_0 a w_1 .

La seguente figura rappresenta il caso della riduzione del costo del lavoro la quale determina una rotazione in senso antiorario della retta di isocosto facendo perno sull'intercetta verticale (diminuzione del valore assoluto del coefficiente angolare). L'effetto di sostituzione (ES) è valutato a parità di produzione rimandando sull'isoquante corrispondente alla produzione $q = q_0$, mentre l'effetto output (EO) è valutato nel passaggio dal punto fittizio E' al punto di equilibrio finale E_1 . L'effetto totale, dato dalla somma dell'effetto di sostituzione e dell'effetto output, considera la produzione ottimale dell'impresa dopo la riduzione del prezzo del lavoro ($q_1 > q_0$).



Per come è stato costruito il grafico, i due fattori produttivi sono complementari, perchè al ridursi del costo del lavoro l'utilizzo del capitale è aumentato. Questo risultato non è valido in generale, ma dipende da come sono state costruiti gli isoquanti di produzione.

Esercizio 3.35

La funzione di produzione di breve periodo per ognuna delle 10000 imprese identiche operanti in un mercato è data da $q = 10 \ln L$. Si determini la domanda di lavoro (L^d) nell'intero sistema economico se $p = 20\text{€}$ e $w = 4\text{€}$.

Soluzione:

Dalla funzione di produzione di breve periodo è possibile calcolare l'utilizzo ottimale del lavoro di ogni impresa sulla base della relazione che eguaglia il valore della produttività marginale al salario, cioè

$$p \frac{\partial q}{\partial L} = w.$$

Dati i valori $p = 20\text{€}$, $w = 4\text{€}$ e data la funzione di produzione $q = 10\ln L$, si ottiene

$$20 \frac{10}{L} = 4 \quad \Rightarrow \quad L^* = 50.$$

Questa è la domanda di lavoro di ogni singola impresa. Dato che nel sistema economico esistono 10000 imprese, l'utilizzo totale del lavoro (domanda aggregata di lavoro) sarà dato da $L^d = 10000L^* = 500000$.

• ————— **Esercizio 3.36** ————— •

In un mercato concorrenziale operano $n = 100$ imprese identiche, con la seguente funzione di costo totale di breve periodo data da $CT = 0.1q^2 + q + 10$, dove q è la quantità prodotta dalla singola impresa. Si determinini la funzione di offerta aggregata sul mercato.

Soluzione:

Al fine di calcolare la funzione di offerta aggregata occorre calcolare la funzione di offerta della singola impresa. Dato che la funzione di costo totale è nota, ogni impresa sceglierà la produzione tale che valga l'eguaglianza tra prezzo di vendita del prodotto e costo marginale al fine di massimizzare il proprio profitto, quindi risulta

$$p = C' \quad \Rightarrow \quad p = 0.2q + 1 \quad \Rightarrow \quad q^* = 5(p - 1).$$

Poiché esistono $n = 100$ imprese identiche, la funzione di offerta aggregata (Q^*) sarà data da $Q^* = nq^* = 500(p - 1)$.

Capitolo 4

Esercizio 4.1

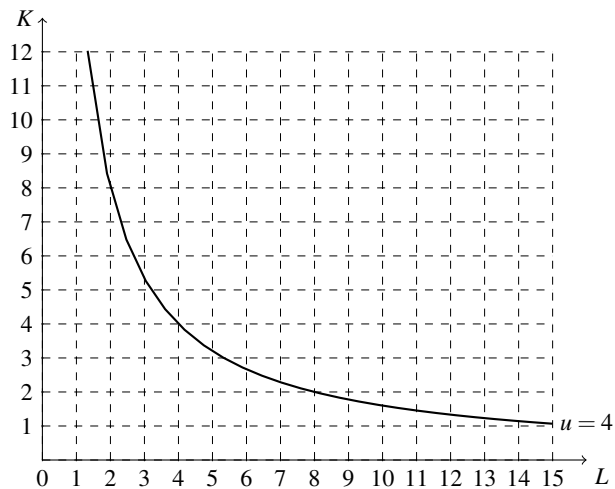
Data la funzione di utilità $u(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$, esplicitando la funzione rispetto alla variabile x_2 , si rappresenti graficamente la curva di indifferenza per $u = 4$ e per valori di x_1 compresi tra 1 e 8.

Soluzione:

L'equazione della funzione di utilità è di tipo Cobb-Douglas. Esplicitandola rispetto alla variabile x_2 , si ottiene l'equazione

$$x_2^{0.5} = \frac{u}{x_1^{0.5}} \Rightarrow x_2 = \frac{u^2}{x_1}.$$

Per $u = 4$ l'equazione diventa quella dell'iperbole $x_2 = \frac{16}{x_1}$ rappresentata nel seguente grafico.



Esercizio 4.2

Data la funzione di utilità $u(x_1, x_2) = x_1^{1/4} \sqrt{x_2 - 2}$, si calcoli l'utilità marginale di x_2 e si verifichi che è sempre decrescente.

Soluzione:

L'utilità marginale di x_2 corrisponde alla seguente derivata

$$u'_{x_2} = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{x_1^{1/4}}{2\sqrt{x_2-2}}.$$

Per verificarne la decrescenza, è sufficiente dimostrare che la sua derivata rispetto ad x_2 (la quale corrisponde alla derivata seconda della funzione di utilità rispetto ad x_2) è sempre negativa. Analiticamente si ottiene

$$u''_{x_2} = \frac{\partial^2 u(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} = \frac{\partial u'_{x_2}}{\partial x_2} = -\frac{1}{2} \frac{x_1^{1/4}}{2(x_2-2)^{3/2}} = -\frac{x_1^{1/4}}{4(x_2-2)^{3/2}}.$$

Si tenga presente che, affinché $u(x_1, x_2)$ sia una funzione di utilità, devono risultare $x_1 > 0$ e $x_2 - 2 > 0$, quindi $x_2 > 2$. Poiché nell'espressione sia il numeratore che il denominatore sono entrambi sempre positivi, la derivata è sempre negativa, in quanto è preceduta da un segno “-”. Questo risultato implica che la funzione di utilità marginale è globalmente decrescente (quindi la funzione di utilità è globalmente concava) rispetto ad x_2 .

Esercizio 4.3

Si calcoli il saggio marginale di sostituzione nel caso della funzione di utilità $u(x_1, x_2) = 3 \ln(x_1) + 2 \ln(x_2)$.

Soluzione:

Il saggio marginale di sostituzione è dato dall'opposto del rapporto delle utilità marginali calcolate rispetto ai beni x_1 e x_2 , quindi risulta

$$\text{SMS}(x_1, x_2) = -\frac{u'_{x_1}}{u'_{x_2}} = -\frac{\frac{3}{x_1}}{\frac{2}{x_2}} = -\frac{3}{2} \frac{x_2}{x_1}.$$

Esercizio 4.4

Data la funzione di utilità $u(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2$, si calcolino:

1. l'utilità marginale di x_1 e x_2 ,
2. il saggio marginale di sostituzione.

Soluzione:

La funzione di utilità è quella relativa a due beni, x_1 e x_2 , tra loro perfettamente sostituiti. Per diversi valori dell'utilità, tale funzione dà luogo ad un fascio di curve di indifferenza lineari, parallele e decrescenti.

Soluzioni degli Esercizi

1. Le funzioni di utilità marginale sono rispettivamente date dai due coefficienti

$$u'_{x_1} = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \alpha \quad \text{e} \quad u'_{x_2} = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \beta.$$

2. Il saggio marginale di sostituzione è quindi costante e vale

$$\text{SMS}(x_1, x_2) = -\frac{u'_{x_1}}{u'_{x_2}} = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

Esercizio 4.5

Data la funzione di utilità $u(x_1, x_2) = x_1 + g(x_2)$, dove $g(x_2)$ è una generica funzione continua e derivabile in x_2 , si calcolino:

1. l'utilità marginale di x_1 e x_2 ,
2. il saggio marginale di sostituzione.

Soluzione:

Sapendo che $\frac{\partial g(x_2)}{\partial x_1} = 0$ (la funzione non dipende dalla variabile x_1) e ponendo $g'(x_2) = \frac{\partial g(x_2)}{\partial x_2}$, si ottengono i seguenti risultati:

1. le funzioni di utilità marginale sono rispettivamente date dai due coefficienti

$$u'_{x_1} = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 1 \quad \text{e} \quad u'_{x_2} = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = g'(x_2);$$

2. il saggio marginale di sostituzione vale

$$\text{SMS}(x_1, x_2) = -\frac{u'_{x_1}}{u'_{x_2}} = -\frac{1}{g'(x_2)}.$$

Esercizio 4.6

Data la funzione di utilità $u(x_1, x_2) = \ln x_1 + \beta \ln x_2$, si calcolino:

1. l'utilità marginale di x_1 e x_2 ,
2. il saggio marginale di sostituzione,
3. l'elasticità di sostituzione.

Soluzione:

1. Le funzioni di utilità marginale sono rispettivamente date dai due coefficienti

$$u'_{x_1} = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1} \quad \text{e} \quad u'_{x_2} = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{\beta}{x_2}.$$

2. Il saggio marginale di sostituzione vale

$$\text{SMS}(x_1, x_2) = -\frac{u'_{x_1}}{u'_{x_2}} = -\frac{\frac{1}{x_1}}{\frac{\beta}{x_2}} = -\frac{x_2}{\beta x_1}.$$

3. L'elasticità di sostituzione tra i beni x_1 e x_2 è data da

$$\sigma = \frac{\partial x_2 / x_1}{\partial |\text{SMS}(x_1, x_2)|} \frac{|\text{SMS}(x_1, x_2)|}{x_2 / x_1}.$$

Dato che

$$|\text{SMS}(x_1, x_2)| = \frac{x_2}{\beta x_1} \Rightarrow \frac{x_2}{x_1} = \beta |\text{SMS}(x_1, x_2)|,$$

allora risulta

$$\sigma = \beta \frac{\frac{x_2}{\beta x_1}}{\frac{x_2}{x_1}} = 1,$$

oppure,

$$\sigma = \frac{\partial \ln(x_2/x_1)}{\partial \ln |\text{SMS}(x_1, x_2)|} = \frac{\partial \ln \beta + \ln |\text{SMS}(x_1, x_2)|}{\partial \ln |\text{SMS}(x_1, x_2)|} = \frac{\cancel{\partial \ln \beta}}{\cancel{\partial \ln |\text{SMS}(x_1, x_2)|}} + \frac{\partial \ln |\text{SMS}(x_1, x_2)|}{\partial \ln |\text{SMS}(x_1, x_2)|} = 1.$$

● ————— **Esercizio 4.7** ————— ●

Si rappresenti graficamente il vincolo di bilancio di un consumatore con reddito pari a $Y = 1000\text{€}$, prezzo del bene 1 pari a $p_1 = 4\text{€}$ e del bene 2 pari a $p_2 = 16\text{€}$. Si rappresenti un nuovo vincolo di bilancio nel caso in cui il prezzo del bene 1 aumenti di 4€ .

Soluzione:

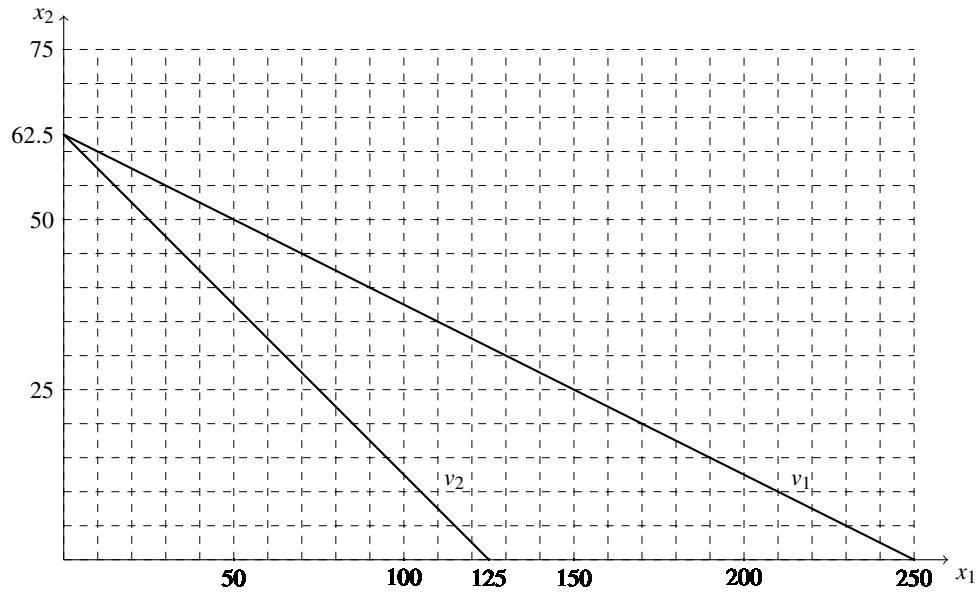
Il vincolo di bilancio con $Y = 1000\text{€}$, $p_1 = 4\text{€}$ e $p_2 = 16\text{€}$ è dato dalla retta di v_1 la quale ha equazione esplicita

$$x_2 = \frac{Y}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1 = 62.5 - \frac{1}{4} x_1.$$

Se p_1 raddoppia, l'equazione diventa quella della retta v_2 data da

$$x_2 = 62.5 - \frac{1}{2} x_1.$$

Dal grafico si può notare che l'intercetta verticale non cambia mentre quella orizzontale si riduce da $\frac{1000}{4} = 250$ a $\frac{1000}{8} = 125$.



Esercizio 4.8

Un individuo ha acquistato il paniere P composto da $x_1 = 10$ unità del bene 1 e da $x_2 = 40$ unità del bene 2 ai prezzi $p_1 = p_2 = 2\text{€}$ spendendo tutto il suo reddito. Se il prezzo del bene 2 aumenta di € , di quanto deve aumentare il suo reddito in termini relativi per far sì che l'individuo possa acquistare lo stesso paniere P ?

Soluzione:

Quando i prezzi sono $p_1 = p_2 = 2\text{€}$, il reddito (iniziale) del consumatore ammonta a

$$Y_0 = 2(10 + 40) = 100\text{€}.$$

Se il prezzo p_1 passa da 2€ a 3€ , affinché il consumatore possa acquistare lo stesso paniere, il nuovo reddito deve essere

$$Y_1 = 3 \cdot 10 + 2 \cdot 40 = 30 + 80 = 110\text{€}.$$

La variazione in termini relativi del reddito è quindi $\frac{Y_1 - Y_0}{Y_0} = \frac{110 - 100}{100} = 0.1$ che, in termini percentuali, è pari al 10%.

• ————— **Esercizio 4.9** ————— •

Un consumatore ha la funzione di utilità $u(x_1, x_2) = 7x_1x_2$. Si supponga che egli disponga inizialmente di 10 unità del bene 1 e di 3 unità del bene 2 e che possa acquistare o vendere i due beni sul mercato al prezzo dato, pari a $p_1 = 3\text{€}$ e $p_2 = 2\text{€}$. Si definiscano le quantità domandate ed offerte dei due beni da parte del consumatore quando egli massimizza la sua utilità.

Soluzione:

Per risolvere l'esercizio si possono utilizzare differenti metodologie. La più semplice è quella di considerare che l'individuo venda le quantità di beni di cui dispone, ottenga il tradizionale reddito monetario e decida quanto acquistare dei due beni.

Se vende tutti i suoi beni ottiene un reddito monetario pari a $m = p_1x_1 + p_2x_2 = 3 \cdot 10 + 2 \cdot 3 = 36\text{€}$.

Quindi è "come se" l'individuo avesse un reddito $Y = 36\text{€}$. Dato che $\text{SMS}(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{x_1}$, il sistema

(4.16) diventa

$$\begin{cases} \frac{x_2}{x_1} = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{36}{2} - \frac{3}{2}x_1 \end{cases}$$

Dalla prima equazione, si ottiene il sentiero di espansione del consumo $x_2 = \frac{3}{2}x_1$ che, sostituito nella seconda equazione, definisce la domanda del bene 1 data da

$$\frac{3}{2}x_1 = 18 - \frac{3}{2}x_1 \Rightarrow x_1^* = 6,$$

mentre la domanda del bene 2 è $x_2^* = \frac{3}{2}x_1^* = 9$.

L'individuo disponeva di 10 unità del bene 1 e di 3 unità del bene 2. Questo vuol dire che effettivamente dovrà vendere $4 = 10 - 6$ unità del bene 1 ed acquistare $6 = 9 - 3$ unità del bene 2.

Al fine di controllo, si può verificare se l'incasso derivante dalla vendita del bene 1 sia uguale alla spesa per il bene 2. Vendendo 4 unità del bene 1, incassa $4 \cdot 3 = 12\text{€}$. Acquistando 6 unità del bene 2, spende $6 \cdot 2 = 12\text{€}$. Quindi gli incassi e la spesa si equivalgono.

L'individuo, grazie a questi scambi, ottiene una maggiore utilità, infatti la sua utilità prima dello scambio era data da

$$u_0 = 7x_1x_2 = 7 \cdot 10 \cdot 3 = 210,$$

mentre la sua utilità dopo lo scambio è data da

$$u_1 = 7x_1^*x_2^* = 7 \cdot 6 \cdot 9 = 378.$$

Lo scambio dei beni ha migliorato il suo benessere.

• ————— **Esercizio 4.10** ————— •

Sapendo che la funzione di utilità di un consumatore è data da $u(x_1, x_2) = x_1^{1/3} x_2^{2/3}$ e che i prezzi sono $p_1 = 1\text{€}$ e $p_2 = 5\text{€}$, si dica quale (o quali) tra i seguenti panieri potrebbe essere quello ottimo per il consumatore.

1. $x_1 = 1000, x_2 = 400$;
2. $x_1 = 700, x_2 = 200$;
3. $x_1 = 550, x_2 = 500$.

Soluzione:

Il sistema (4.16) permette di calcolare le funzioni di domanda dei due beni. Tuttavia, al fine di risolvere l'esercizio è sufficiente conoscere il rapporto tra x_1 e x_2 , il quale è definito dall'uguaglianza tra saggio marginale di sostituzione e rapporto dei prezzi, quindi risulta

$$|\text{SMS}(x_1, x_2)| = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} x_1^{-2/3} x_2^{2/3}}{\frac{1}{2} x_1^{1/3} x_2^{-1/3}} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{5} \Rightarrow x_2 = \frac{2}{5} x_1.$$

Fra le tre opzioni presentate nel testo, soltanto nel primo caso ($x_1 = 1000, x_2 = 400$) la relazione stabilita nel sentiero di espansione del consumo è soddisfatta, quindi rappresenta l'unica soluzione ottima per il consumatore.

Esercizio 4.11

Sia $\sigma = 2$ l'elasticità di sostituzione tra i beni 1 e 2. Se il prezzo relativo $\frac{p_1}{p_2}$ aumentasse del 20%, di quanto varierebbe l'intensità relativa?

Soluzione:

Poiché, se il consumatore è in equilibrio, l'elasticità di sostituzione tra due beni è calcolabile attraverso l'equazione

$$\sigma = \frac{\frac{\Delta(x_2/x_1)}{x_1/x_2}}{\frac{|\Delta|\text{SMS}(x_1, x_2)|}{|\text{SMS}(x_1, x_2)|}} = \frac{\frac{\Delta(x_2/x_1)}{x_1/x_2}}{\frac{\Delta(p_1/p_2)}{p_1/p_2}},$$

se $\sigma = 2$ e $\frac{\Delta(p_1/p_2)}{p_1/p_2} = 20\%$, allora risulta

$$\frac{\Delta(x_2/x_1)}{x_1/x_2} = \sigma \frac{\Delta(p_1/p_2)}{p_1/p_2} = 2 \cdot 20\% = 40\%.$$

Esercizio 4.12

L'elasticità della domanda rispetto al prezzo di un bene (x) è pari a $\varepsilon_{x,p} = -0.1$. Si supponga che una variazione delle condizioni di mercato abbia ridotto la quantità scambiata del 10%. Sapendo che il prezzo del bene è $p = 30\text{€}$, qual è il nuovo prezzo di equilibrio?

Soluzione:

Dato che, per variazioni percentuali non infinitesime, l'elasticità della domanda al prezzo è data dall'equazione

$$\epsilon_{x,p} = \frac{\frac{\delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}},$$

per $\epsilon_{x,p} = 0.1$ e $\frac{\Delta x}{x} = -10\%$, risulta

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{1}{\epsilon_{x,p}} \frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{-0.1} (-10\%) = 100\%.$$

Una variazione percentuale del 100% significa che il nuovo prezzo (p') deve essere il doppio di quello di partenza, infatti risulta

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{p' - p}{p} = \frac{p'}{p} - 1 = 100\% \Rightarrow \frac{p'}{p} = 2 \Rightarrow p' = 2p.$$

• ————— **Esercizio 4.13** ————— •

Se la funzione di domanda di un bene è $x = 3p^{-4}$ ed il prezzo (p) aumentasse del 3%, di quanto varierebbe la quantità domandata in termini percentuali? (*indicare il segno*).

Soluzione:

La funzione di domanda è isoealastica (loglineare) di elasticità costante pari a $\epsilon_{x,p} = -4$ quindi, se il prezzo aumentasse del $\frac{\Delta p}{p} = 3\%$, la variazione percentuale della quantità domandata risulterebbe essere

$$\frac{\Delta x}{x} = \epsilon_{x,p} \frac{\Delta p}{p} = -4 \cdot 3\% = 12\%.$$

• ————— **Esercizio 4.14** ————— •

La funzione di domanda di un consumatore per il bene 1 ha equazione $x_1 = Y - 10p_1 + p_2$, dove Y è il reddito disponibile del consumatore, mentre p_1 e p_2 sono i prezzi dei beni 1 e 2; si calcoli l'elasticità del consumo del bene 1 rispetto al prezzo del bene 2 sapendo che il reddito è pari a $Y = 450\text{€}$, il prezzo del bene 1 è pari a $p_1 = 25\text{€}$, mentre il prezzo del bene 2 è pari a $p_2 = 50$. Si stabilisca inoltre se i due beni sono sostituti, complementari o indipendenti.

Soluzione:

Calcolando l'elasticità incrociata (elasticità del consumo del bene 1 rispetto al prezzo del bene 2), si ottiene

$$\epsilon_{x_1, p_2} = \frac{\partial x_1}{\partial p_2} \frac{p_2}{x_1} = 1 \cdot \frac{p_2}{Y - 10p_1 + p_2} = \frac{50}{450 - 10 \cdot 25 + 50} = \frac{50}{250} = 0.2.$$

Poiché il valore dell'elasticità incrociata è positivo, il bene 1 ed il bene 2 sono sostituti.

Esercizio 4.15

Sia data la funzione di domanda $x = Y^{2.5} p^{-1.5}$ dove Y è il reddito del consumatore e p il prezzo del bene x . Supponendo che il reddito e il prezzo aumentino entrambi del 3%, quale sarà la variazione percentuale del consumo del bene x ?

Soluzione:

A seguito dell'aumento del 3% del reddito e del prezzo di vendita, il nuovo livello di consumo sarà

$$x' = [Y(1+3\%)]^{2.5} [p(1+3\%)]^{-1.5} = (1+3\%)^{2.5-1.5} Y^{2.5} p^{-1.5} = (1+3\%) Y^{2.5} p^{-1.5} = (1+3\%)x.$$

La variazione percentuale del consumo del bene x è quindi

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{x' - x}{x} = \frac{(1+3\%)x - x}{x} = \frac{\cancel{x}(1+3\% - 1)}{\cancel{x}} = 3\%.$$

Esercizio 4.16

La relazione tra consumo di un bene (x) e reddito (Y) è stabilita dall'equazione $x = 1 - \frac{14}{Y}$. Si determini il valore massimo di reddito ($Y_{\max}$) affinché il bene sia di lusso.

Soluzione:

Affinché il bene sia di lusso, deve risultare

$$\epsilon_{x,Y} > 1 \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial Y} \frac{Y}{x} > 1 \Rightarrow \frac{14}{Y^2} \frac{Y}{1 - \frac{14}{Y}} > 1 \Rightarrow \frac{14}{Y} \frac{1}{\frac{Y-14}{Y}} > 1 \Rightarrow \frac{14}{Y-14} > 1,$$

quindi

$$Y - 14 < 14 \Rightarrow Y < 28\text{€}$$

Esercizio 4.17

Per organizzare la festa di compleanno della figlia, un papà si rivolge ad una ditta specializzata per avere a disposizione un servizio di catering (x) per la cena. Supponendo che la sua funzione di domanda per questo servizio sia $x = 18Y^{1/2}/p$, dove p è il prezzo del servizio. Sapendo che il reddito del papà è pari a $Y = 1225\text{€}$, a quanto ammonta la spesa (E) che sostiene per organizzare la festa?

Soluzione:

La spesa sostenuta dal papà per organizzare la festa è

$$E = px = \cancel{p} \frac{18Y^{1/2}}{\cancel{p}} = 18Y^{1/2}.$$

Sapendo che $Y = 1225\text{€}$, risulta quindi $E = 18\sqrt{1225} = 18 \cdot 35 = 630\text{€}$.

Esercizio 4.18

Il saggio marginale di sostituzione tra due beni (x_2 e x_1) è definito da

$$|\text{SMS}(x_1, x_2)| = 2 \frac{x_2}{x_1}.$$

Sia $p_2 = 2\text{€}$ il prezzo del bene 2. Sapendo che il reddito a disposizione del consumatore è pari a $Y = 120\text{€}$, si determini la funzione di domanda del bene 1.

Se $p_1 = 6\text{€}$, quale quota del suo reddito spenderebbe il consumatore nell'acquisto del bene 1?

Soluzione:

Il testo fornisce il valore del saggio marginale di sostituzione, quindi è possibile impostare il sistema (4.16) dato da

$$\begin{cases} 2 \frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{2} \\ x_2 = \frac{60}{2} - \frac{p_1}{2} x_1. \end{cases}$$

Dalla prima equazione, si ottiene il sentiero di espansione del consumo $x_2 = \frac{p_1}{4} x_1$ che, sostituito nella seconda equazione determina la domanda del bene 1 data da

$$\frac{p_1}{4} x_1 = \frac{120}{2} - \frac{p_1}{2} x_1 \quad \Rightarrow \quad x_1^* = \frac{80}{p_1}.$$

Se $p_1 = 6\text{€}$, la quantità consumata del bene 1 è pari a $x_1^* = \frac{80}{6}$, mentre la spesa per il bene 1 è pari

a $E = p_1 x_1^* = \cancel{6} \cdot \frac{80}{\cancel{6}} = 80\text{€}$. Dato che il reddito del consumatore è pari a $Y = 120\text{€}$, la quota del reddito spesa per il bene 1 è

$$\frac{p_1 x_1^*}{Y} = \frac{80}{120} = \frac{2}{3},$$

quindi il consumatore spenderà $\frac{2}{3}$ del proprio reddito per il bene 1 ed il restante $\frac{1}{3}$ per l'acquisto del bene 2.

Esercizio 4.19

Si calcoli l'elasticità della spesa al prezzo ($\epsilon_{E,p}$) di un bene (x) la cui funzione di domanda diretta è data da $x = 2p^{-0.4}$.

Soluzione:

Poiché l'elasticità della spesa al prezzo è pari all'elasticità della domanda al prezzo più 1, risulta

$$\epsilon_{E,p} = 1 + \epsilon_{x,p} = 1 - 0.4 = 0.6,$$

in quanto la funzione di domanda è isoelastica con elasticità della domanda al prezzo pari a $\epsilon_{x,p} = -0.4$.

In alternativa, l'esercizio può essere risolto calcolando l'equazione della spesa

$$E = px = p \cdot 2p^{-0.4} = 2p^{1-0.4} = 2p^{0.6}.$$

Anche questa funzione è isoelastica e risulta $\epsilon_{E,p} = 0.6$.

Esercizio 4.20

La curva reddito-consumo di un bene ha equazione $x = 10Y + Y^2$. Si calcoli il valore dell'elasticità della domanda rispetto al reddito quando quest'ultimo è uguale a $Y = 10\text{€}$.

Soluzione:

L'elasticità della domanda rispetto al reddito è

$$\epsilon_{x,Y} = \frac{\partial x}{\partial Y} \frac{Y}{x} = (10 + 2Y) \frac{Y}{10Y + Y^2}.$$

Se $Y = 10\text{€}$, risulta

$$\epsilon_{x,Y} = (10 + 2 \cdot 10) \frac{10}{10 \cdot 10 + 10^2} = 30 \frac{10}{200} = \frac{3}{2} = 1.5.$$

Esercizio 4.21

La curva Engeliana di domanda di un individuo per il bene x è data da $x = \frac{Y}{5} - \frac{Y^2}{100}$. Si calcoli l'elasticità al reddito quando $Y = 12\text{€}$ e si classifichi il bene rispetto al reddito.

Soluzione:

L'elasticità della domanda rispetto al reddito è

$$\epsilon_{x,Y} = \frac{\partial x}{\partial Y} \frac{Y}{x} = \left(\frac{1}{5} - \frac{Y}{50} \right) \frac{Y}{\frac{Y}{5} - \frac{Y^2}{100}} = \frac{10-Y}{50} \frac{Y}{\frac{Y(20-Y)}{100}} = 2 \frac{10-Y}{20-Y}.$$

Se $Y = 12\text{€}$, risulta

$$\epsilon_{x,Y} = 2 \frac{10-12}{20-12} = -\frac{4}{8} = -0.5.$$

Il bene x è inferiore.

Esercizio 4.22

Si assuma che il prezzo della benzina (bene 1) sia pari a 2€/litro. Lo Stato, al fine di ridurre l'utilizzo dell'auto, decide di aumentare il prezzo a 3€/litro e, nello stesso tempo, erogare un sussidio di reddito in modo tale da garantire all'individuo un'utilità pari a quella che poteva ottenere prima dell'aumento di prezzo. Il reddito dell'individuo è pari a $Y = 2000\text{€}$ e la funzione di utilità è data da $u(x_1, x_2) = x_1^{0.25} x_2^{0.75}$, dove x_2 indica la quantità di un bene composito il cui prezzo è pari a $p_2 = 1\text{€}$. Si calcoli la variazione compensativa di reddito.

Soluzione:

L'individuo è in equilibrio quando risulta

$$|\text{SMS}(x_1, x_2)| = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \frac{0.25}{0.75} \frac{x_2}{x_1} = 2 \Rightarrow x_2 = 6x_1.$$

Sostituendo il sentiero di espansione del consumo all'interno del vincolo di bilancio del consumatore, si ottiene la domanda del bene 1 data da

$$Y = p_1 x_1 + p_2 x_2 \Rightarrow 2x_1 + 6x_1 = 2000 \Rightarrow x_1^* = \frac{2000}{8} = 250,$$

mentre la domanda del bene 2 è $x_2^* = 6x_1^* = 1500$.

Se il prezzo della benzina aumenta a 3€/litro, si ottiene

$$|\text{SMS}(x_1, x_2)| = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow \frac{0.25}{0.75} \frac{x_2}{x_1} = 3 \Rightarrow x_2 = 9x_1.$$

Sostituendo il sentiero di espansione del consumo all'interno del vincolo di bilancio del consumatore, si ottiene la domanda del bene 1 data da

$$Y = p'_1 x_1 + p_2 x_2 \Rightarrow 3x_1 + 9x_1 = 2000 \Rightarrow x'_1 = \frac{Y'}{12},$$

mentre la domanda del bene 2 è $x'_2 = 9x'_1 = \frac{9}{12} Y' = \frac{3}{4} Y'$, dove Y' è il nuovo reddito compensato del consumatore.

Soluzioni degli Esercizi

La variazione compensativa del reddito scaturisce dall'uguaglianza delle funzione di utilità nei due scenari proposti, cioè

$$u(x_1^*, x_2^*) = u(x_1', x_2) \Rightarrow x_1^{*0.25} x_2^{*0.75} = x_1'^{0.25} x_2'^{0.75} \Rightarrow 250^{0.25} 1500^{0.75} = \left(\frac{Y'}{12}\right)^{0.25} \left(\frac{3}{4} Y'\right)^{0.75},$$

quindi

$$Y'^{0.25+0.75} = 12^{0.25} \left(\frac{4}{3}\right)^{0.75} 250^{0.25} 1500^{0.75} \Rightarrow Y' = (12 \cdot 250)^{0.25} \left(\frac{4 \cdot 1500}{3}\right)^{0.75} = 3000^{0.25} 2000^{0.75}.$$

La variazione compensativa del reddito è quindi

$$\frac{Y' - Y}{Y} = \frac{3000^{0.25} 2000^{0.75} - 2000}{2000} = \left(\frac{3000}{2000}\right)^{0.25} - 1 = 1.5^{0.25} - 1 \approx 1.1067 - 1 \approx 0.1067,$$

cioè di circa il 10.67%.

Esercizio 4.23

Un consumatore consuma due beni, con le seguenti funzioni di domanda:

$$x_1 = 10 + \frac{1}{2}p_2 - p_1 \quad \text{e} \quad x_2 = 3 + \frac{1}{4}p_1 - \frac{1}{2}p_2.$$

Se il prezzo di equilibrio del bene 1 è pari a $p_1 = 1\text{€}$ e il prezzo del bene 2 aumenta da $p_2 = 0.5\text{€}$ a $p_2 = 1\text{€}$, di quanto cambia il surplus complessivo che il consumatore ottiene nei due mercati?

Soluzione:

Dato che, prima dell'aumento, il prezzo del bene 2 è $p_2 = 1\text{€}$ e il prezzo del bene 1 è $p_1 = 0.50\text{€}$, dalle funzioni di domanda del testo si ottengono

$$x_1 = 10 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 10 \quad \text{e} \quad x_2 = 3 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 3.$$

Dopo l'aumento di prezzo del bene 1, si ottengono

$$x_1' = 10 + \frac{1}{2} - 1 = 9.5 \quad \text{e} \quad x_2' = 3 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 2.75.$$

Il surplus del consumatore (SC) è dato dall'area del triangolo disegnato nella figura 4.16(b) del testo e in generale è definito dall'intercetta verticale (a) della funzione inversa di domanda meno il prezzo del bene (p) per la quantità consumata (x) diviso per 2, cioè

$$SC = \frac{(a - p)x}{2}.$$

Le funzioni inverse di domanda nei due mercati sono

$$p_1 = 10 + \frac{1}{2}p_2 - x_1 \quad \text{e} \quad p_2 = 6 + \frac{1}{2}p_1 - 2x_2.$$

Le intercette nei due mercati sono inizialmente ($p_1 = 1\text{€}$ e $p_2 = 0.5\text{€}$)

$$a_1 = 10 + \frac{1}{2}p_2 = 10.25 \quad \text{e} \quad a_2 = 6 + \frac{1}{2}p_1 = 6.5,$$

quindi il surplus complessivo è pari a

$$\begin{aligned} SC &= SC_1 + SC_2 \\ &= \frac{(a_1 - p_1)x_1}{2} + \frac{(a_2 - p_2)x_2}{2} \\ &= \frac{(10.25 - 1)10}{2} + \frac{(6.5 - 0.5)3}{2} \\ &= 46.25 + 9 \\ &= 55.25\text{€}. \end{aligned}$$

Per $p'_2 = 1\text{€}$ l'intercetta della prima equazione di domanda diventa

$$a'_1 = 10 + \frac{1}{2}p'_2 = 10.5,$$

quindi il surplus complessivo è pari a

$$\begin{aligned} SC' &= SC_1 + SC'_2 \\ &= \frac{(a_1 - p'_1)x'_1}{2} + \frac{(a'_2 - p_2)x'_2}{2} \\ &= \frac{(10.5 - 1)9.5}{2} + \frac{(6.5 - 1)2.75}{2} \\ &= 45.125 + 7.5625 \\ &\approx 52.69\text{€}. \end{aligned}$$

La perdita del surplus per il consumatore ammonta a $\Delta SC = SC' - SC \approx 52.69 - 55.25 \approx -2.56\text{€}$.

Esercizio 4.24

La funzione inversa di domanda individuale di benzina è data da $p = 2 - 0.05x$, dove p è il prezzo della benzina e x è la quantità consumata. Il prezzo della benzina è di 1.5€ . Di quanto diminuirebbe il surplus del consumatore se tale prezzo crescesse di 0.1€ ?

Soluzione:

La funzione di domanda di benzina è $x = 40 - 20p$. Per $p = 1.5\text{€}$ la quantità di benzina consumata è pari a $x^* = 10$, quindi il surplus del consumatore è pari a

$$SC = \frac{(2 - 1.5)10}{2} = 2.5\text{€}.$$

Se $p = 1.6\text{€}$, la quantità domandata è pari a $x = 8$ alla quale corrisponde un surplus del consumatore pari a

$$SC' = \frac{(2 - 1.6)8}{2} = 1.60\text{€}.$$

La variazione di surplus per il consumatore è allora pari a

$$\Delta SC = SC' - SC = 1.6 - 2.5 = -0.90\text{€}$$

che costituisce una perdita.

Esercizio 4.25

Data la funzione di utilità di un individuo $u(\ell, m) = m + \sqrt{\ell}$, sapendo che l'individuo dispone di redditi non derivanti dall'attività lavorativa in misura pari a V , si calcoli la funzione di offerta di lavoro (si indichi il salario con w).

Soluzione:

Poiché dalla condizione di equilibrio risulta

$$\text{SMS}(\ell, m) = w \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{\ell}} = w \Rightarrow \ell^* = \frac{1}{4w^2},$$

quindi l'offerta di lavoro dell'individuo è data da

$$h^* = (T - \ell^*) = T - \frac{1}{4w^2} = \frac{4Tw^2 - 1}{4w^2},$$

dove T è il tempo totale a disposizione dell'individuo.

Esercizio 4.26

Un soggetto che considera due periodi dispone di un reddito $m_1 = 2000\text{€}$ nel primo periodo e di un reddito $m_2 = 800\text{€}$ nel secondo periodo. Si scriva la funzione di risparmio del soggetto se le sue preferenze sono tali che egli preferisce mantenere invariato il suo consumo nei due periodi.

Soluzione:

Se l'individuo vuole mantenere invariato il consumo nei due periodi, deve risultare $C_1 = C_2$. In questo caso il consumo nel periodo 1 ed il consumo nel periodo 2 sono perfettamente complementari. Definendo con C il livello di consumo costante, il vincolo di bilancio nelle scelte intertemporali è dato da

$$C_2 = m_2 + (1+r)(m_1 - C_1)$$

per $C_1 = C_2 \equiv C$, per $m_1 = 2000\text{€}$ e $m_2 = 800\text{€}$, risulta

$$C = 800 + (1+r)(2000 - C) \Rightarrow (2+r)C = 800 + 2000(1+r) \Rightarrow C(r) = 400 \frac{7+5r}{2+r} \text{€}.$$

La funzione di risparmio è data dal reddito del primo periodo meno la funzione di consumo del primo periodo, quindi si ottiene

$$S(r) = 2000 - 400 \frac{7+5r}{2+r} = \frac{2000(2+r) - 400(7+5r)}{2+r} = \frac{4000 + 2000r - 2800 - 2000r}{2+r} = \frac{1200}{2+r} \text{€}.$$

Esercizio 4.27

Un individuo vive in due periodi, indicati come periodo 1 e 2. Nel periodo 1 egli percepisce un certo reddito, pari a m , mentre nel periodo 2 non percepisce redditi. La sua funzione di utilità intertemporale è data da $u(C_1, C_2) = \ln C_1 + \ln C_2$, dove C_1 e C_2 indicano le quantità consumate rispettivamente nel periodo 1 e 2. Il tasso di interesse è r . A quanto ammonta l'elasticità di C_2 rispetto al tasso di interesse?

Soluzione:

Il valore assoluto del saggio marginale di sostituzione intertemporale è dato da

$$|\text{MSI}(C_1, C_2)| = \frac{\frac{\partial u(C_1, C_2)}{\partial C_1}}{\frac{\partial u(C_1, C_2)}{\partial C_2}} = \frac{C_2}{C_1};$$

Le scelte intertemporali ottimali sono definite dal sistema (4.36) dato da

$$\begin{cases} \frac{C_2}{C_1} = 1 + r \\ C_2 = (m - C_1)(1 + r), \end{cases}$$

in quanto il reddito del primo periodo è pari a m e quello del secondo periodo pari a 0€ . Dalla prima equazione, si ottiene

$$C_2 = (1 + r)C_1$$

che, sostituita nella seconda equazione, dà luogo a

$$(1 + r)C_1 = (m - C_1)(1 + r) \Rightarrow 2C_1 = m \Rightarrow C_1^* = \frac{m}{2}.$$

Il consumo del primo periodo è sempre pari a metà del reddito e non dipende dal tasso di interesse. Il consumo del secondo periodo è dato da

$$C_2^* = (1 + r)\frac{m}{2}.$$

L'elasticità del consumo del secondo periodo al tasso di interesse è quindi pari a

$$\varepsilon_{C_2, r} = \frac{\partial C_2}{\partial r} \frac{r}{C_2} = \frac{m}{2} \frac{r}{(1+r)\frac{m}{2}} = \frac{r}{1+r}.$$

Esercizio 4.28

Sia $\text{MSI}(C_1, C_2) = -\frac{C_2}{C_1}$ il saggio marginale di sostituzione tra consumo del periodo 1 e consumo del periodo 2 di una dato individuo. Se questo individuo dispone di un reddito nel primo periodo pari a $m_1 = 200\text{€}$ e nel secondo periodo pari a $m_2 = 160\text{€}$, indicando con r il tasso di interesse, quale sarà la sua funzione di risparmio? Quanto vale l'elasticità del risparmio al tasso di interesse?

Soluzione:

Il sistema (4.36) permette di risolvere l'esercizio, quindi risulta

$$\begin{cases} \frac{C_2}{C_1} = 1 + r \\ C_2 = (200 - C_1)(1 + r) + 160. \end{cases}$$

Soluzioni degli Esercizi

Dalla prima equazione, si ottiene $C_2 = (1+r)C_1$ che, sostituito nella seconda, dà luogo a

$$(1+r)C_1 = (200 - C_1)(1+r) + 160 \Rightarrow 2(1+r)C_1 = 360 + 200r \Rightarrow C_1(r) = 20 \frac{9+5r}{1+r}.$$

Il risparmio è dato da

$$S = m_1 - C_1 = 200 - 20 \frac{9+5r}{1+r} = 20 \frac{1+5r}{1+r}.$$

Applicando la definizione di elasticità del risparmio al tasso di interesse, risulta

$$\varepsilon_{S,r} = \frac{\partial S}{\partial r} \frac{r}{S} = \frac{80}{(1+r)^2} \frac{r}{20 \frac{1+5r}{1+r}} = \frac{4r}{(1+r)(1+5r)}.$$

Esercizio 4.29

La funzione di utilità intertemporale per un individuo è: $u(C_1, C_2) = C_1^{0.5} + 0.9C_2^{0.5}$. Il reddito di tale consumatore nei due periodi di tempo è $m_1 = 1000$ e $m_2 = 600$. Calcolare il risparmio se il saggio di interesse è $r = 10\%$.

Soluzione:

Il saggio marginale di sostituzione è dato da

$$\text{MSI}(C_1, C_2) = \frac{\frac{0.5}{\sqrt{C_1}}}{\frac{0.45}{\sqrt{C_2}}} = \frac{10}{9} \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}$$

Dalla condizione di equilibrio si ottiene

$$\text{MSI}(C_1, C_2) = 1+r \Rightarrow \frac{10}{9} \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} = 1.1 \Rightarrow C_2 = 0.99^2 C_1 = 0.9801 C_1.$$

Sostituendo questo risultato nel vincolo di bilancio intertemporale:

$$0.9801 C_1 = (1000 - C_1)1.1 + 600 \Rightarrow 2.0801 C_1 = 1600 \Rightarrow 1600 C_1^* = \frac{1600}{2.0801} \approx 769.19€.$$

Dato che il reddito del primo periodo è pari a 1000€ e il consumo ottimale del primo periodo è pari a 769.19€, il risparmio sarà pari a $S \approx 1000 - 769.19 \approx 230.81€$.

Capitolo 5

Esercizio 5.1

Un laureato sarà disoccupato con probabilità del 20%. In questo caso il suo reddito mensile sarà pari ad un sussidio di $Y = 200\text{€}$. Se trova lavoro, il suo reddito sarà pari a $Y = 500\text{€}$. Si calcoli il valore atteso del reddito del laureato.

Soluzione:

Il valore atteso del reddito del laureato disoccupato è dato dalla somma dei redditi che può ottenere nei due scenari, ciascuno ponderato per la rispettiva probabilità, cioè

$$E(Y) = 200 \cdot 20\% + 500 \cdot 80\% = 40 + 400 = 440\text{€},$$

dove la somma delle probabilità associate a tutti gli eventi deve essere necessariamente il 100%.

Esercizio 5.2

Un individuo può partecipare alle seguenti lotterie:

1. vincere 160€ con probabilità 7/8, oppure perdere 700€;
2. vincere 2000€ con probabilità 1/10 oppure perdere 250€;
3. vincere 40000€ con probabilità 1/1000 oppure perdere 10€.

Dovendo scegliere una sola lotteria, qual è il massimo valore atteso che riesce ad ottenere?

Soluzione:

Dato che si assume neutralità al rischio (non ci sono ipotesi circa l'attitudine dell'individuo al rischio), le scelte dell'individuo sono basate sul confronto dei valori attesi delle tre scommesse che risultano essere

1. $E(\pi_1) = \frac{7}{8}160 - \frac{1}{8}700 = 140 - 87.50 = 52.50\text{€};$
2. $E(\pi_2) = \frac{1}{10}2000 - \frac{9}{10} \cdot 250 = 200 - 225 = -25\text{€};$
3. $E(\pi_3) = \frac{1}{1000}40000 - \frac{999}{1000} \cdot 10 = 40 - 9.99 = 30.01\text{€}.$

La scommessa che dà il valore atteso maggiore è π_1 , quindi l'individuo sceglierà di parteciparvi.

Esercizio 5.3

Un individuo dispone di un reddito pari a 100€ se accetta il posto di lavoro offertogli da un'impresa. In alternativa, egli può però avviare un'attività in proprio dove, con una probabilità del 40%, ottiene un reddito di 200€ e, con probabilità del 60%, ottiene un reddito pari a 40€.

Sapendo che l'individuo sceglie il posto di lavoro offerto dall'impresa, si dica se l'individuo è (una sola risposta esatta):

1. sicuramente avverso al rischio;
2. avverso o neutrale al rischio, sicuramente non propenso;
3. neutrale o propenso al rischio, sicuramente non avverso;
4. sicuramente propenso al rischio;
5. sicuramente neutrale al rischio;
6. avverso o propenso al rischio, sicuramente non neutrale.

Soluzione:

L'individuo sceglie il posto di lavoro offerto dall'impresa, che garantisce un reddito certo di 100€. Se avesse avviato l'attività in proprio, il valore atteso sarebbe stato pari a

$$E(\pi) = 200 \cdot 40\% + 40 \cdot 60\% = 80 + 24 = 104\text{€},$$

quindi il valore atteso del lavoro in proprio è maggiore del valore atteso del lavoro dipendente. Poiché l'individuo sceglie il lavoro dipendente, ciò vuol dire che egli è sicuramente è avverso al rischio.

Le altre opzioni presentate nell'esercizio sono tutte impossibili, infatti l'individuo non può essere neutrale al rischio, né propenso al rischio, perché in entrambi i casi avrebbe preferito il lavoro autonomo.

Esercizio 5.4

Un individuo che ha funzione di utilità data da $u(M) = 70M^{0.5}$, dove M è il reddito, è sottoposto ad una situazione di rischio tale per cui tre possibili livelli di reddito potrebbero realizzarsi: 81€, 256€ oppure 625€. Le probabilità associate ai primi due valori sono rispettivamente 30% e 40%. Dopo aver indicato se questo individuo è avverso, neutrale o propenso al rischio, si calcoli la sua utilità attesa.

Soluzione:

L'individuo è avverso al rischio, in quanto la sua funzione di utilità è concava rispetto al reddito, infatti

$$\frac{\partial^2 u(M)}{\partial M^2} = \frac{\partial u'(M)}{\partial M} = \frac{\partial 35M^{-0.5}}{\partial M} = -17.5M^{-1.5} < 0.$$

La sua utilità attesa è

$$\begin{aligned} E[u(M)] &= 0.3 \cdot 70 \cdot 81^{0.5} + 0.4 \cdot 70 \cdot 256^{0.5} + 0.3 \cdot 70 \cdot 625^{0.5} \\ &= 70(0.3\sqrt{81} + 0.4\sqrt{256} + 0.3\sqrt{625}) \\ &= 70(2.7 + 6.4 + 7.5) \\ &= 70 \cdot 16.6 = 1162. \end{aligned}$$

Esercizio 5.5

All'esame di Economia Politica dopo lo scritto ogni studente può presentarsi all'esame orale secondo le seguenti regole: può aumentare di 3 punti il voto ottenuto allo scritto, può mantenerlo invariato oppure può essere bocciato (quindi il voto è uguale a zero).

La funzione di utilità, che dipende dal voto (V), è $u(V) = \sqrt{V}$.

Nell'ipotesi che la probabilità di aumentare il voto sia del 70%, mentre quella di essere bocciato sia del 5% (quindi quella di mantenerlo invariato del 25%), per quali valori del voto ottenuto allo scritto lo studente deciderebbe di sostenere la prova orale?

Soluzione:

Se lo studente non sostiene la prova orale, ottiene una utilità certa pari a $u(V) = \sqrt{V}$, mentre se decide di sostenere la prova orale la sua utilità attesa sarà invece data da

$$E[u(V)] = 0.7\sqrt{V+3} + 0.05\sqrt{0} + 0.25\sqrt{V}.$$

Egli deciderà di sostenere la prova orale se

$$E[u(V)] \geq u(V) \Rightarrow 0.7\sqrt{V+3} + 0.25\sqrt{V} \geq \sqrt{V} \Rightarrow 0.7\sqrt{V+3} \geq 0.75\sqrt{V} \Rightarrow \sqrt{\frac{V}{V+3}} \leq \frac{0.7}{0.75},$$

quindi

$$\frac{V}{V+3} \leq \left(\frac{0.7}{0.75}\right)^2 \Rightarrow \frac{V}{V+3} \leq 0.8711 \Rightarrow V \leq 0.8711(V+3)$$

che, risolta in V , porta al risultato

$$V \leq \frac{3 \cdot 0.8711}{1 - 0.8711} \approx 20.2759.$$

Lo studente deciderà di tentare la prova orale solo se il voto ottenuto all'esame scritto è non superiore a $V = 20$.

Esercizio 5.6

Le modalità dell'esame di Economia Politica sono le seguenti: si può scegliere il compito A che, se svolto correttamente, permette di ottenere un voto pari a 20 oppure si può scegliere il compito B che, se svolto correttamente, permette di ottenere un voto di 30. In ambedue i casi, se le soluzioni non sono corrette, si ottiene una bocciatura (il voto è zero).

Se la funzione di utilità è $u = \sqrt{V}$, dove V indica il voto ottenuto e la probabilità di svolgere correttamente il compito A è pari a 0.6, qual è la probabilità minima di svolgere correttamente il compito B che spinge lo studente a sceglierlo?

Soluzione:

Scegliendo il compito A, si supera l'esame con probabilità del 60% e si prende un voto pari a 20. Dato che l'utilità dipende dal voto ottenuto (e che, se si viene bocciati, il voto e l'utilità sono pari a 0), l'utilità attesa sarà pari a

$$E[u(V^A)] = 0.6\sqrt{20} \approx 2.6833.$$

Se invece si sceglie il compito B, si supera l'esame con probabilità incognita (p) e si prende un voto pari a 30. In questo caso l'utilità attesa sarà

$$E[u(V^B)] = p\sqrt{30} = 5.4772p.$$

Per far sì che la scelta ricada sul compito B, deve valere

$$E[u(V^B)] \geq E[u(V^A)] \Rightarrow 5.4772p \geq 2.6833 \Rightarrow p \geq \frac{2.6833}{5.4772} \approx 0.4899.$$

Se la probabilità di superare l'esame B è maggiore del 48.99%, si sceglie l'esame B, altrimenti si sceglie l'esame A.

Esercizio 5.7

Un individuo neutrale al rischio deve scegliere se intraprendere una libera professione che potrebbe rendere 4000€ al mese se gli affari andranno bene, oppure solo l'ottava parte di quella cifra nel caso di crisi economica.

Se l'individuo fosse indifferente rispetto ad un lavoro dipendente retribuito con 1550€ mensili, qual è la probabilità che egli associa all'evento crisi economica?

Soluzione:

Dai dati proposti nell'esercizio emerge che l'individuo, neutrale al rischio, è indifferente tra un lavoro dipendente certo retribuito con 1550€ e un valore retribuito 4000€ se le cose vanno "bene" oppure 500€ se le cose vanno "male". Chiede qual è la probabilità venga assegnata all'evento "crisi economica", cioè alla situazione in cui gli affari andranno "male". Dato che l'individuo è neutrale al rischio, deve valere

$$1550 = 4000(1 - f) + 500f,$$

dove f indica la probabilità che gli affari vadano "male".

Risolvendo in f , $f = \frac{7}{10} = 70\%$ che rappresenta la probabilità soggettiva che l'individuo assegna all'evento crisi economica.

Esercizio 5.8

In Italia, una cuoca avversa al rischio con funzione di utilità $u(Y) = 1 - 10/Y$ guadagna 1600€ al mese. Se emigrasse in Germania potrebbe guadagnare 2500€ se venisse assunta in un ristorante di alto livello oppure 1000€ se venisse assunta in uno di livello basso. Per quale valore della probabilità di essere assunta in un ristorante di alto livello preferirà rimanere in Italia?

Soluzione:

L'utilità certa di restare in Italia deve essere maggiore dell'utilità attesa in caso di emigrazione, quindi deve risultare

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{1600} &> \left(1 - \frac{1}{2500}\right)p + \left(1 - \frac{1}{1000}\right)(1 - p) \\ \frac{1}{1000} - \frac{1}{1600} &> \left(\frac{1}{1000} - \frac{1}{2500}\right)p \\ \frac{8-5}{8000} &> \frac{5-2}{5000}p \\ \frac{3}{8} &> \frac{3}{5}p \\ p &< \frac{5}{8} = 0.625. \end{aligned}$$

Se la probabilità di essere assunta in un ristorante di alto livello è inferiore al 62.5%, la cuoca preferirà rimanere in Italia.

Esercizio 5.9

Un'agenzia di scommesse permette di puntare sulla partita di Champions League tra Real Madrid e Liverpool secondo il seguente schema: in caso di pareggio restituisce la posta, in caso di vittoria del Liverpool paga 1.44 volte la posta, in caso di vittoria del Real Madrid la posta è persa. Assumendo che la probabilità di vittoria del Real Madrid sia pari al 10%, che la funzione di utilità di uno scommettitore sia $u(Y) = \sqrt{Y}$ e che la sua ricchezza sia pari a $m = 1\text{€}$, qual è la massima probabilità di pareggio ($f_{\max}$) che spinge lo scommettitore a puntare tutta la sua ricchezza sulla vittoria del Liverpool?

Soluzione:

L'utilità certa del gioco è $u(1) = 1$ che l'individuo può ottenere non scommettendo oppure scommettendo se le due squadre dovessero pareggiare. In questo caso, lo scommettitore che intende puntare tutto sulla vittoria del Liverpool, deve innanzitutto decidere di giocare, quindi deve risultare

$$\begin{aligned} E[u(Y)] \geq u(Y) &\Rightarrow \sqrt{1.44m(90\% - f) + \sqrt{m}f + 0.10\%} \geq \sqrt{m} \\ &\Rightarrow 1.2(90\% - f)\sqrt{m} \geq (1 - f)\sqrt{m} \\ &\Rightarrow 0.2f \leq 1.2 \cdot 0.9 - 1 \\ &\Rightarrow f \leq \frac{0.08}{0.2} = 0.4. \end{aligned}$$

La massima probabilità di pareggio che spinge lo scommettitore a puntare tutta la sua ricchezza sulla vittoria del Liverpool è $f_{\max} = 40\%$.

Esercizio 5.10

Un individuo con ricchezza iniziale pari a $Y_0 = 100\text{€}$ è indifferente al rischio. Nel suo paese si svolge una lotteria. Per partecipare all'estrazione di un premio bisogna pagare una quota di iscrizione pari a z . Se si paga la quota di partecipazione, si vince un premio di 50€ con probabilità $p_v = 0.19$. Non si vince nulla con la probabilità $p_v = 0.81$. Si determini la quota di iscrizione massima ($z_{\max}$) che questo individuo sarebbe disposto a pagare per partecipare alla lotteria.

Soluzione:

L'utilità certa pari a 100 deve essere inferiore all'utilità attesa affinché l'individuo partecipi alla lotteria, quindi deve risultare

$$\begin{aligned} (M + 50 - z)p_v + (M - z)(1 - p_v) &\geq M \\ (150 - z)p_v + (100 - z)(1 - p_v) &\geq 100 \\ 150p_v - zp_v + 100 - 100p_v - z + zp_v &\geq 100 \\ 50p_v - z &\geq 0 \\ z &\leq 50p_v \\ z &\leq 50 \cdot 0.19 \\ z &\leq 9.50\text{€}. \end{aligned}$$

La quota di iscrizione massima che l'individuo sarebbe disposto a pagare per partecipare alla lotteria è pari a $z_{\max} = 9.50\text{€}$.

Esercizio 5.11

Una compagnia di assicurazione propone ad un individuo un contratto contro i furti in appartamento. Il premio da pagarsi alla compagnia ammonta a 496€. La ricchezza dell'individuo è pari a 4096€ e il valore dei beni che possono essere rubati ammonta a 2496€. Nell'ipotesi che la funzione di utilità sia $u = \sqrt{Y}$, qual è il livello minimo della probabilità ($f_{\min}$) di subire furti che fa sì che l'individuo sottoscriva il contratto?

Soluzione:

L'individuo deve scegliere se assicurarsi o meno contro i furti. Egli è avverso al rischio con funzione di utilità $u(Y) = \sqrt{Y}$, dove Y indica la sua ricchezza. Se si assicura, la sua utilità certa è data da

$$u(Y) = \sqrt{4096 - 496} = \sqrt{3600} = 60.$$

Definendo con f la probabilità del verificarsi del furto (la grandezza incognita che l'esercizio richiede di calcolare), se l'individuo non si assicura la sua utilità attesa è data da

$$E[u(Y)] = f\sqrt{4096 - 2496} + (1 - f)\sqrt{4096} = 40f + (1 - f)64 = 64 - 24f.$$

La condizione affinché l'individuo stipuli il contratto di assicurazione è

$$u(Y) \geq E[u(Y)] \Rightarrow 60 \geq 64 - 24f \Rightarrow f \geq \frac{1}{6} \approx 16.67\%.$$

L'individuo troverà conveniente assicurarsi se ritiene che la probabilità di subire furti sia uguale o superiore a circa il 16.67%.

Esercizio 5.12

Partendo per le vacanze, un soggetto si vuole assicurare contro il furto nel suo appartamento. Egli vive in un condominio di 20 appartamenti, ognuno dei quali ha la stessa probabilità di essere visitato dai ladri. Purtroppo si sa con certezza che uno solo di questi verrà effettivamente rapinato. Si stima che un eventuale danno dovuto al furto ammonti a 150000€, mentre la ricchezza del soggetto è di $Y_0 = 500000\text{€}$. Sapendo che la sua funzione di utilità è $u = 4Y$, qual è il premio massimo che egli è disposto a pagare all'assicurazione?

Soluzione:

La probabilità di subire furti è pari a $f = \frac{1}{20}$. Se non ci si assicura e il furto si verifica, la ricchezza, pari a $Y_0 = 500\,000\text{€}$, si riduce a $350\,000\text{€}$ e l'utilità attesa è pari a

$$E[u(Y)] = 4 \left(\frac{19}{20} 500\,000 + \frac{1}{20} 350\,000 \right).$$

Se il soggetto si assicura, la sua ricchezza è pari a $500\,000 - z\text{€}$, dove z è il premio di assicurazione. La sua utilità certa è quindi

$$u(Y) = 4(500\,000 - z).$$

Il soggetto decide di assicurarsi quando risulta

$$u(Y) \geq E[u(Y)] \Rightarrow 4(500\,000 - z) \geq 4 \left(\frac{19}{20} 500\,000 + \frac{1}{20} 350\,000 \right) \Rightarrow 500\,000 - z \geq 492\,500,$$

quindi

$$z \leq 7500\text{€}.$$

Esercizio 5.13

Un albergo dispone di due parcheggi. Uno non è sorvegliato, quindi gratuito, mentre l'altro è custodito, quindi è a pagamento. La probabilità che un'auto venga rubata nel parcheggio non custodito è $f = 0.1\%$. Quanti Euro sarà disposto a pagare il proprietario, neutrale al rischio, di un'auto che vale 6000€ e che non è assicurata contro il furto?

Soluzione:

Il proprietario dell'auto è neutrale al rischio, quindi è possibile ragionare direttamente sul valore atteso delle due opzioni, quella di assicurarsi e quella di non assicurarsi.

Definendo il premio di assicurazione con z , il valore certo nel caso egli si assicuri è pari a

$$u(Y) = 6000 - z,$$

mentre nel caso che non si assicuri, il valore atteso è pari a

$$E[u(Y)] = 0.999 \cdot 6000 + 0.001 \cdot 0 = 0.999 \cdot 6000.$$

Il proprietario dell'auto sarà disposto a pagare per il parcheggio se risulta

$$u \geq E[u(Y)] \Rightarrow 6000 - z \geq 0.999 \cdot 6000 \Rightarrow z \leq 0.001 \cdot 6000 \Rightarrow z \leq 6\text{€}.$$

Esercizio 5.14

Un individuo neutrale al rischio deve scegliere se assicurare contro i danni da incendio la propria abitazione che ha un valore di $460\,000\text{€}$. In caso di incendio, che si verifica con probabilità $f = 0.1\%$, il valore dell'immobile si ridurrebbe a 0€ . Si determini il premio assicurativo massimo ($z_{\max}$) che spinge l'individuo ad assicurarsi.

Soluzione:

Poiché l'individuo è indifferente al rischio, indicando il valore dell'abitazione con M , deve risultare

$$-z \geq 0 - f + (1-f)M \Rightarrow z \leq M - (1-f)M \Rightarrow z \leq fM,$$

quindi

$$z \leq 460000 \cdot 0.1\% \Rightarrow z \leq 460\text{€}.$$

Esercizio 5.15

Si determini il valore massimo di probabilità ($p_{\max}$) che si verifichi un furto di appartamento affinché una compagnia di assicurazione trovi conveniente offrire polizze a copertura di tale danno stimato mediamente in $M = 7000\text{€}$. Nel computo si tenga conto che una legge ha fissato il premio assicurativo a $z = 500\text{€}$ annui e che, per ciascun cliente, la compagnia deve sostenere un costo di gestione pari a $CG = 150\text{€}$.

Soluzione:

Affinché le compagnie di assicurazione offrano polizze occorre che, per ciascun cliente, queste conseguano un profitto, quindi deve risultare

$$\Pi > 0 \Rightarrow z > fM + CG \Rightarrow f < \frac{500 - CG}{M} \Rightarrow f < \frac{500 - 150}{7000} \Rightarrow f < 0.05.$$

La compagnia di assicurazione trova conveniente offrire polizze se il valore massimo di probabilità che si verifichi un furto di appartamento è $p_{\max} = 5\%$.

Capitolo 6

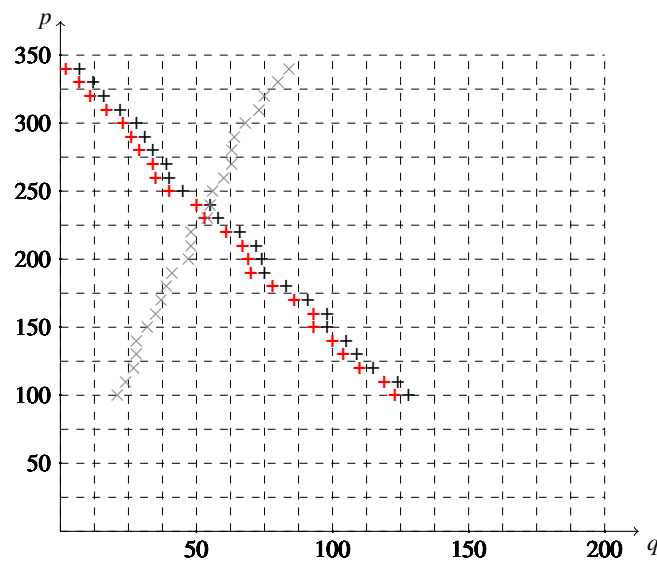
Esercizio 6.1

Come varia il grafico a dispersione in Figura 1.2 se i dati relativi alla colonna Q^d in Tabella 1.1 venissero ridotti di 5 unità? Si inseriscano i dati in un foglio di calcolo, si costruisca il nuovo grafico e si commentino i risultati.

Soluzione:

Per disegnare il grafico occorre predisporre un foglio elettronico nel quale si devono copiare le colonne 1 e 5 interstate rispettivamente al prezzo di vendita (p) e all'offerta di smartphone (Q^s). A queste due colonne se ne aggiunga una, intestata come domanda di smartphones (Q^d), nella quale vengono inseriti i valori della colonna Q^d in Tabella 1.1 decurtati di 5 (ad esempio, dall'alto verso il basso, in ogni cella vanno inseriti 123, 119, 110, ..., 2).

A questo punto, dai dati in Tabella, si crei il seguente grafico a dispersione.



Diminuendo i valori di Q^d di 5 unità, si ottiene uno spostamento verso sinistra dei valori indicati con il simbolo "+" (dai simboli neri a quelli rossi). Dal punto di vista economico questa riduzione corrisponde ad una contrazione della domanda, cioè una diminuzione della quantità domandata di smartphone sul mercato in corrispondenza di ciascun livello di prezzo.

Esercizio 6.2

Date le funzioni di domanda e di offerta di mercato, $Q^d = 14 - p$ e $Q^s = -2 + p$, si determini l'equilibrio di mercato.

Soluzione:

L'equilibrio di mercato è determinato semplicemente dall'intersezione tra la curva di domanda e di offerta. Analiticamente la soluzione consiste quindi nell'uguaglianza

$$Q^d = Q^s \Rightarrow 14 - p = -2 + p \Rightarrow p^* = 8\text{€}.$$

Sostituendo all'interno della funzione di domanda (sostituendo all'interno della funzione di offerta si otterrebbe lo stesso risultato), si ottiene

$$Q^* = 14 - p^* = 14 - 8 = 6.$$

L'equilibrio di mercato consiste nello scambio di $Q^* = 6$ unità di prodotto in corrispondenza del prezzo $p^* = 8\text{€}$.

Esercizio 6.3

In un mercato le funzioni di domanda e di offerta sono date rispettivamente da $Q^d = 120 - p$ e $Q^s = 20 + 0.5p$. Supponendo che il prezzo di mercato sia stabilito al livello $p = 50\text{€}$, si determini il valore dell'eccesso di offerta (segno positivo) o di domanda (segno negativo).

Soluzione:

Se il prezzo di mercato è stato fissato a $p_0 = 50\text{€}$, sostituendo nella funzione di domanda si ottiene

$$Q_0^d = 120 - p_0 = 120 - 50 = 70.$$

mentre sostituendo nella funzione di offerta si ottiene

$$Q_0^s = 20 + 0.5p_0 = 20 + 0.5 \cdot 50 = 45.$$

Poiché risulta $Q_0^d > Q_0^s$, si ha un eccesso di domanda pari a $Q_0^s - Q_0^d = 45 - 70 = -25$.

Esercizio 6.4

In un mercato la funzione di domanda è $p = 35 - Q^d$, mentre quella di offerta è $p = 5 + 0.5Q^s$. Per quale prezzo si verifica un eccesso di offerta pari a 30?

Soluzione:

Poiché le equazioni fornite dal testo sono quelle inverse di domanda e di offerta, per determinare l'eccesso di offerta bisogna disporre delle funzioni di domanda e di offerta. Tali funzioni sono rispettivamente

$$Q^d = 35 - p \quad \text{e} \quad Q^s = -10 + 2p.$$

Affinché risulti un eccesso di offerta pari a 30 deve valere

$$Q^s - Q^d = 30 \Rightarrow 35 - p - (-10 + 2p) = 30 \Rightarrow 45 - 3p = 30 \Rightarrow p_0 = 5\text{€}.$$

• ————— **Esercizio 6.5** ————— •

In un sistema economico sono presenti 300 consumatori identici, caratterizzati dalla funzione di domanda individuale di un bene (q) di equazione $q = 100 - p$, dove p indica il prezzo del bene. Sapendo che l'offerta totale del bene è fissa e pari a $Q = 600$ unità, si calcoli il prezzo di equilibrio del bene.

Soluzione:

La funzione di domanda di ognuno degli $N = 300$ consumatori identici proposta nel testo è $q = 100 - p$. La domanda aggregata ha quindi equazione

$$Q^d = Nq = 300(100 - p) = 30\,000 - 300p.$$

Dato che l'offerta del bene è fissa a pari a $Q^s = 600$, il prezzo di equilibrio si ottiene attraverso l'uguaglianza

$$Q^d = Q^s \Rightarrow 30\,000 - 300p = 600 \Rightarrow p^* = 98\text{€}.$$

• ————— **Esercizio 6.6** ————— •

Un comune dispone di 250 alloggi studenteschi e la curva di domanda è data da $Q^d = 700 - p/3$. Se il comune imponesse di fissare l'affitto a 300€ per appartamento, di quanto dovrebbe variare l'offerta (Q^s) per soddisfare la domanda di mercato?

Soluzione:

Dato che il Comune “offre” $Q_0^s = 250$, se applicasse il prezzo $p_0 = 300\text{€}$, dovrebbe offrire

$$Q_1^s = Q^d(300) = 700 - \frac{300}{3} = 600.$$

L'offerta dovrebbe variare perciò di $Q_1^s - Q_0^s = 600 - 250 = 350$ appartamenti.

• ————— **Esercizio 6.7** ————— •

In un mercato, le curve di domanda e di offerta sono date rispettivamente da $p = 90 - 2q$ e $p = 2 + 2q^2$. Poiché il prezzo è stato fissato dallo Stato al valore $p = 74\text{€}$, si determini l'eccesso di domanda (nel caso di eccesso di offerta indicare un valore negativo).

Soluzione:

Le funzioni di domanda e di offerta sono rispettivamente

$$q^d = \frac{90-p}{2} = 45 - \frac{p}{2} \quad \text{e} \quad q^s = \sqrt{\frac{p-2}{2}} = \sqrt{\frac{p}{2} - 1}.$$

Sostituendo in entrambe le funzioni $p = 74\text{€}$, si ottengono

$$q^d = 45 - \frac{74}{2} = 8 \quad \text{e} \quad q^s = \sqrt{\frac{74}{2} - 1} = \sqrt{36} = 6.$$

Si registra pertanto un eccesso di domanda dato da $q^d - q^s = 8 - 6 = 2$.

Esercizio 6.8

In un mercato la funzione di domanda è data dall'equazione $Q^d = 80 - 2p$, mentre la funzione di offerta ha equazione $Q^s = p - 25$. Si supponga che le imprese produttrici beneficino di un nuovo macchinario e siano perciò in grado di incrementare la produzione del 20% praticando lo stesso prezzo. Qual è il nuovo equilibrio sul mercato?

Soluzione:

Se le imprese riescono ad incrementare la produzione del 20% praticando lo stesso prezzo, significa che c'è un'espansione dell'offerta (in un piano cartesiano con la produzione in ascissa e il prezzo in ordinata si ha uno spostamento parallelo verso destra della curva di offerta). Analiticamente, a parità di funzione di domanda la nuova offerta avrà equazione $Q_1^s = (1 + 20\%)Q^s$. L'equilibrio di mercato è stabilito attraverso l'uguaglianza

$$Q^d = (1 + 20\%)Q^s \Rightarrow 80 - 2p = (1 + 20\%)(p - 25) \Rightarrow 1.2p + 2p = 80 + 1.2 \cdot 25,$$

quindi

$$3.2p = 110 \Rightarrow p^* = \frac{110}{3.2} = 34.375\text{€}$$

a cui corrisponde la quantità scambiata $Q^* = p^* - 25 = 34.375 - 25 = 9.375$.

Esercizio 6.9

Un mercato è caratterizzato dalle funzioni di domanda e di offerta lineari $Q^d = 40 - (p - Y)$ e $Q^s = 70 + p$. Si calcoli l'equilibrio del mercato ipotizzando che $Y = 150\text{€}$. A seguito di una manovra economica (miracolosa) effettuata dal Governo i consumatori aumentano il loro reddito del 4%: come si modificherà l'equilibrio sul mercato?

Soluzione:

Nel caso in cui risulti $Y = 150\text{€}$, l'equilibrio di mercato è stabilito dall'uguaglianza

$$Q^d = Q^s \Rightarrow 40 - p + 150 = 70 + p \Rightarrow 2p = 190 - 70 \Rightarrow p_0 = 60\text{€}$$

a cui corrisponde la quantità scambiata $Q_0 = 70 + p_0 = 70 + 60 = 130$.

Se il reddito dei consumatori aumenta del 4%, il nuovo equilibrio di mercato è dato dall'uguaglianza

$$Q_1^d = Q^s \Rightarrow 40 - p + 150(1 + 4\%) = 70 + p \Rightarrow 2p = 196 - 70 \Rightarrow p_1 = 63\text{€}$$

a cui corrisponde la quantità scambiata $Q_1 = 70 + p_1 = 70 + 63 = 133$.

La modifica che subisce l'equilibrio di mercato è il risultato di un'espansione della domanda, quindi si ottiene un aumento del prezzo di vendita e della quantità scambiata.

• ————— **Esercizio 6.10** ————— •

Un mercato in cui la funzione di domanda è $Q^d = Y - p$, dove Y è il reddito dei consumatori, inizialmente si trova in equilibrio in corrispondenza del prezzo di mercato $p_0 = 50\text{€}$ e della quantità scambiata $Q_0 = 14$. Qual è l'aumento percentuale del reddito che porterebbe l'equilibrio in corrispondenza di $p^* = 52\text{€}$ e $Q^* = 16$?

Soluzione:

Se inizialmente il mercato è in equilibrio in corrispondenza della quantità scambiata $Q_0 = 14$ e del prezzo $p_0 = 50\text{€}$, significa che il reddito dei consumatori ammonta a

$$Q^d = Y - p \Rightarrow Y_0 = Q_0 + p_0 = 14 + 50 = 64\text{€}.$$

Nel caso in cui l'equilibrio sia ottenuto in corrispondenza di $Q^* = 16$ e $p^* = 52\text{€}$, il reddito deve ammontare a

$$Y^* = Q^* + p^* = 16 + 52 = 68\text{€}.$$

La variazione percentuale del reddito è quindi pari a

$$\frac{Y^* - Y_0}{Y_0} = \frac{68 - 64}{64} = 0.0625 = 6.25\%.$$

• ————— **Esercizio 6.11** ————— •

Un distributore di benzina vende 8500 litri al giorno al prezzo di 1.31€. Se porta il prezzo a 1.32€, vende 8420 litri. Si calcoli l'elasticità della domanda di benzina al prezzo.

Soluzione:

Essendo le variazioni di quantità e prezzo non infinitesime, si calcola l'elasticità d'arco data da

$$\widehat{\epsilon}_{q,p} = \frac{\frac{\Delta q}{q}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{\frac{8420 - 8500}{8500}}{\frac{1.32 - 1.31}{1.31}} \approx \frac{-0.9412\%}{0.7634\%} \approx -1.2329.$$

Esercizio 6.12

In una mensa universitaria, che vende 300 pasti al giorno, l'elasticità della domanda di pasti al prezzo è $\epsilon_{Q^d,p} = -0.1$. Se il prezzo aumenta del 10%, quanti pasti in meno saranno venduti?

Soluzione:

Dato che $\epsilon_{Q^d,p} = \frac{\frac{\Delta Q^d}{Q^d}}{\frac{\Delta p}{p}}$, se $\frac{\Delta p}{p} = 10\%$, risulta

$$\frac{\Delta Q^d}{Q^d} = \epsilon_{Q^d,p} \frac{\Delta p}{p} = -0.1 \cdot 10\% = -1\%.$$

Dato che la mensa universitaria inizialmente vende 300 pasti al giorno, risulta

$$\frac{\Delta Q^d}{Q^d} = -1\% \Rightarrow \frac{Q_1^d - 300}{300} = -1\% \Rightarrow \frac{Q_1^d}{300} = 0.99 \Rightarrow Q_1^d = 0.99 \cdot 300 = 297.$$

Esercizio 6.13

Se l'equazione della funzione di domanda di un bene è $Q^d = 27 - p$, per quale prezzo il valore assoluto dell'elasticità della domanda al prezzo è pari a 2?

Soluzione:

L'elasticità della domanda al prezzo è data da

$$\epsilon_{Q^d,p} = \frac{\partial Q^d}{\partial p} \frac{p}{Q^d} = -\frac{p}{27 - p}.$$

Il suo valore assoluto si ottiene

$$\frac{p}{27 - p} = 2 \Rightarrow p = 54 - 2p \Rightarrow p = 18\text{€}.$$

• ————— **Esercizio 6.14** ————— •

Una panetteria vende $Q = 50\text{Kg}$ di pane al giorno al prezzo di $p = 4\text{€}$ al Kg. Il fornaio decide di aumentarne il prezzo dell'1%. La quantità venduta giornalmente si riduce dell'1%. Si calcoli l'elasticità della domanda di pane al prezzo indicandone il segno.

Soluzione:

Poiché entrambe le variazioni di quantità e prezzo sono dell'1%, ma di segno opposto, il valore dell'elasticità della domanda al prezzo è

$$\epsilon_{Q,p} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial p} \frac{1\%}{p}}{\frac{1\%}{p}} = -1.$$

• ————— **Esercizio 6.15** ————— •

La funzione di domanda di un bene è data da $Q^d = 480 - p$, mentre la funzione di offerta dello stesso bene da $Q^s = 2p$. Si calcoli il valore dell'elasticità della domanda al prezzo in corrispondenza della situazione di equilibrio di mercato.

Soluzione:

L'equilibrio di mercato è ottenuto in corrispondenza dell'uguaglianza

$$Q^d = Q^s \Rightarrow 480 - p = 2p \Rightarrow 3p = 480 \Rightarrow p^* = 160\text{€}$$

a cui corrisponde la quantità scambiata $Q^* = 320$.

Poiché l'elasticità della domanda (lineare) al prezzo vale $\epsilon_{Q,p} = -\frac{p}{480 - p}$, allora nel punto di equilibrio risulta

$$\epsilon_{Q,p} = -\frac{p^*}{480 - p^*} = -\frac{160}{480 - 160} = -\frac{1}{2}.$$

• ————— **Esercizio 6.16** ————— •

Un imprenditore sa che l'elasticità della domanda al prezzo del bene che produce è pari a $\epsilon_{Q,p} = -2$. Nel corso dell'ultimo mese la domanda di questo bene è aumentata del 9% (a prezzi invariati). Qual è la variazione percentuale del prezzo che l'imprenditore potrebbe applicare per mantenere la spesa al livello del mese precedente?

Soluzione:

Poiché a prezzi invariati risulta $\frac{\partial Q}{Q} = 9\%$, significa che

$$\frac{\partial E}{E} = \frac{\partial(pQ)}{pQ} = p \frac{\partial Q}{Q} = 9\%.$$

Dato che l'elasticità della spesa al prezzo è $\varepsilon_{E,p} = 1 + \varepsilon_{Q,p} = 1 - 2 = -1$, affinché la spesa resti invariata occorre che

$$\varepsilon_{E,p} = \frac{\frac{\partial E}{E}}{\frac{\partial p}{p}} = -1 \Rightarrow \frac{\partial p}{p} = -9\%.$$

Esercizio 6.17

Le funzioni aggregate di domanda e di offerta di lavoro sono rispettivamente $L^d = 900 - 5w$ e $L^s = 400 + w$, dove w è il salario. Qual è il numero dei disoccupati se il sindacato può fissare il salario in modo da massimizzare il reddito dell'insieme dei lavoratori dato dal prodotto wL ?

Soluzione:

L'esercizio propone una funzione di domanda e di offerta di lavoro e ipotizza che un sindacato fissi il salario in modo tale da massimizzare il reddito dell'insieme dei lavoratori. Pertanto, non esistono ragioni per cui il salario sia quello di equilibrio.

Dato che il livello di occupazione viene scelto dalle imprese per qualunque livello di salario superiore al livello di equilibrio, per la *legge del lato corto* il numero di occupati sarà definito dalla funzione domanda di lavoro. (se invece il salario scelto dal sindacato fosse inferiore a quello di equilibrio, il numero di occupati sarebbe lungo la funzione di offerta, quindi minore del livello di occupazione di equilibrio. Cioè, salari e occupazione sarebbero minori di quelli di equilibrio. È quindi impossibile che il sindacato scelga un salario inferiore a quello di equilibrio).

Il reddito dell'insieme dei lavoratori è dato dal prodotto tra il salario ed il numero di lavoratori domandati dalle imprese a quel salario, cioè da $W = wL^d(w)$. Data la funzione di domanda, risulta

$$W = wL^d(w) = w(900 - 5w) = 900w - 5w^2.$$

Per ottenere il livello del salario che massimizza W , si applica la condizione del primo ordine

$$\frac{\partial W}{\partial w} = 0 \Rightarrow 900 - 10w = 0 \Rightarrow w = 90\text{€}$$

Se il sindacato fissa un salario pari a $w = 90\text{€}$, la domanda di lavoro sarà allora pari a $L^d = 900 - 5 \cdot 90 = 450$, mentre l'offerta di lavoro sarà invece pari a $L^s = 400 + 90 = 490$.

Il numero di disoccupati, pari alla differenza tra l'offerta e la domanda di lavoro è quindi pari a $L^s - L^d = 490 - 450 = 40$. Si noti che dall'eguaglianza tra domanda e offerta di lavoro emerge che il salario di equilibrio di mercato sarebbe definito da

$$400 + w = 900 - 5w \Rightarrow w^* = \frac{250}{3} \approx 83.33\text{€},$$

quindi il salario scelto dal sindacato è superiore a quello di equilibrio.

• ————— Esercizio 6.18 ————— •

In un mercato la funzione di domanda e la funzione di offerta sono date rispettivamente da $Q^d = 96 - p$ e $Q^s = 7p$. Si determini l'ammontare del surplus del produttore in corrispondenza dell'equilibrio di mercato.

Soluzione:

L'equilibrio di mercato è stabilito dall'uguaglianza

$$Q^d = Q^s \Rightarrow 96 - p = 7p \Rightarrow p^* = \frac{96}{8} = 12\text{€}$$

a cui corrisponde la quantità di equilibrio $Q^* = 84$.

Dato che le funzioni di domanda e di offerta sono entrambe lineari, geometricamente il surplus del produttore è dato dall'area del triangolo al di sotto della funzione di offerta per valori della quantità prodotta $0 \leq Q \leq 84$. In formule, risulta perciò

$$SC = \frac{1}{2} Q^* p^* = \frac{84 \cdot 12}{2} = 504\text{€}.$$

• ————— Esercizio 6.19 ————— •

Le funzioni inverse di domanda e di offerta in un mercato hanno rispettivamente equazione $p = 6 + 2Q^s$ e $p = 30 - 4Q^d$. Si calcoli l'ammontare del benessere sociale.

Soluzione:

Innanzitutto occorre calcolare il prezzo e la quantità di equilibrio, ottenute attraverso l'uguaglianza

$$Q^s = Q^d \Rightarrow 6 + 2Q = 30 - 4Q \Rightarrow Q^* = 4.$$

Sostituendo Q^* nella funzione di domanda (o nella funzione di offerta), si ottiene

$$p^* = 14\text{€}.$$

Il surplus dei consumatori è quindi ottenuto attraverso l'equazione (6.21), quindi risulta

$$SC = \frac{1}{2} (30 - 14) 4 = 32\text{€}.$$

Il surplus dei produttori è invece ottenuto attraverso l'equazione (6.22), da cui deriva

$$SP = \frac{1}{2} (14 - 6) 4 = 16\text{€}.$$

Il benessere sociale è la somma dei due, quindi ammonta a $BS = SC + SP = 32 + 16 = 48\text{€}$.

Esercizio 6.20

La quantità domandata sul mercato è $Q^d = 40 - 0.5p$, mentre la quantità offerta è pari a $Q^s = 10$. Si determini l'elasticità della spesa rispetto al prezzo che si ottiene in corrispondenza del punto di equilibrio. Si calcoli inoltre il surplus dei consumatori. A quanto ammonta la variazione della spesa se la quantità offerta aumentasse del 20%?

Soluzione:

L'equilibrio di mercato si ottiene attraverso l'uguaglianza

$$Q^d = Q^s \Rightarrow 40 - 0.5p = 10 \Rightarrow 0.5p = 30 \Rightarrow p^* = 60\text{€}$$

a cui naturalmente corrisponde la quantità di equilibrio $Q^* = 10$ (la funzione di offerta è perfettamente rigida).

Il surplus dei consumatori è dato geometricamente dall'area al di sotto della funzione inversa di domanda per $p \geq 60\text{€}$ (oppure $0 \leq Q \leq 10$). Poiché la funzione inversa di domanda è lineare di equazione $p = 80 - 2Q^d$, la sua intercetta è pari a 80, quindi il surplus dei consumatori ammonta a

$$SC = \frac{1}{2}(80 - p^*)Q^* = \frac{(80 - 60)10}{2} = 100\text{€}.$$

Capitolo 7

Esercizio 7.1

In un mercato di concorrenza perfetta operano $n = 100$ imprese tutte identiche, con funzione di costo totale di breve periodo di equazione $CT = 0.1q^2 + q + 10$, dove q è la quantità prodotta dalla singola impresa. Si determini la funzione di offerta aggregata sul mercato.

Soluzione:

In un mercato di concorrenza perfetta, la curva di offerta della singola impresa coincide con il ramo della curva del costo marginale a partire dal punto di chiusura, quindi l'equazione è

$$s: p = C' = \frac{\partial CT}{\partial q} = 0.2q + 1.$$

Esplicitando l'equazione rispetto alla quantità prodotta la funzione di offerta della singola impresa ha equazione

$$q^s = \frac{p-1}{0.2} = 5p - 5,$$

quindi l'equazione dell'offerta aggregata è

$$Q^s = nq^s = 100(5p - 5) = 500p - 500.$$

Esercizio 7.2

Data la funzione di domanda aggregata in un mercato di concorrenza perfetta è $Q^d = 20 - 0.5p$, mentre la funzione di costo medio delle imprese, valida sia per il breve che per il lungo periodo, $CM = q^2 - 8q + 25$, si calcolino:

1. il livello di produzione dell'impresa e il numero delle imprese (identiche) presenti sul mercato se $p = 20\text{€}$;
2. il numero delle imprese (n) che operano in equilibrio nel lungo periodo.

Soluzione:

1. Data la funzione di costo medio e dato il prezzo di vendita del bene, la funzione di profitto della singola impresa è

$$\Pi = 20q - (q^2 - 8q + 25)q = -q^3 + 8q^2 - 5q.$$

Massimizzando questa funzione rispetto q (oppure imponendo la condizione di uguaglianza tra prezzo e costo marginale), risulta

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0 \Rightarrow -3q^2 + 16q - 5 = 0 \Rightarrow q^* = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 3 \cdot 5}}{3} = \frac{4 \pm \sqrt{49}}{3},$$

quindi, scegliendo la soluzione maggiore, in quanto solo per questa radice il costo marginale è crescente, si ottiene la quantità ottimale $q^* = 5$ per la quale il costo medio sostenuto dall'impresa è

$$CM(5) = 5^2 - 8 \cdot 5 + 24 = 9\text{€}.$$

Questo valore è inferiore al prezzo di vendita, quindi ogni impresa ottiene un profitto positivo che risulta essere pari a

$$\Pi = (p - CM) \cdot q^* = (20 - 9) \cdot 5 = 55\text{€}.$$

Al prezzo $p = 20$, la domanda aggregata ammonta a

$$Q^d = 20 - 0.5 \cdot 20 = 10,$$

pertanto sul mercato opera un numero di imprese pari a

$$n = \frac{Q^d}{q^*} = \frac{10}{5} = 2.$$

2. Nel lungo periodo il prezzo deve essere pari al valore minimo del costo medio. Dalla condizione del primo ordine si ottiene la quantità che sarà prodotta da ogni impresa nel lungo periodo, data da

$$\frac{\partial CM}{\partial q} = 0 \Rightarrow 2q - 8 = 0 \Rightarrow q_A = 4,$$

a cui corrisponde il prezzo di equilibrio di lungo periodo

$$p_A = CM(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 24 = 8\text{€}.$$

Nel lungo periodo, la domanda aggregata è quindi data da

$$Q_A^d = 20 - 0.5p_A = 20 - 0.5 \cdot 8 = 16,$$

mentre la quantità prodotta da ogni impresa pari a $q_A = 4$. Il numero di imprese operanti nel mercato nel lungo periodo sarà quindi dato da

$$n = \frac{Q_A}{q_A} = \frac{16}{4} = 4.$$

Esercizio 7.3

La funzione di costo medio di lungo periodo di un'impresa in concorrenza perfetta è data da $CM = 0.1x^2 - x + 10$, mentre la funzione di domanda dell'intero mercato per il bene x è data da $p = 102.5 - X$, dove X rappresenta la domanda aggregata ed è dato dal numero di imprese per la quantità prodotta da ogni singola impresa.

Qual è il numero delle imprese che operano in questo mercato nel lungo periodo?

Soluzione:

L'esercizio chiede di calcolare il numero di imprese che operano sul mercato nel lungo periodo. A causa dell'ingresso di imprese sul mercato, l'equilibrio di lungo periodo è definito dalla situazione nella quale ogni impresa produce una quantità corrispondente al valore minimo del costo medio come in Figura 7.2(b).

È allora necessario calcolare il livello di x che minimizza il costo medio dato da

$$\frac{\partial CM}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{1}{5}x - 1 = 0 \Rightarrow x_A = 5.$$

Nel lungo periodo, ogni impresa produce $x_A = 5$ unità che venderà sul mercato ad un prezzo pari a

$$p_A = 0.1x_A^2 - x_A + 10 = 0.1 \cdot 25 - 5 + 10 = 7.5\text{€}.$$

Dato questo livello del prezzo, la domanda aggregata nel lungo periodo ammonterà a

$$X_A^d = 102.5 - p_A = 102.5 - 7.5 = 95.$$

Se ogni impresa produce $x_A = 5$ e la domanda aggregata è pari a $Q^d = 95$, allora ci sarà spazio per $n = \frac{95}{5} = 19$ imprese.

Esercizio 7.4

Un numero elevato di imprese in concorrenza perfetta produce un bene omogeneo (q) e tutte le imprese utilizzano una tecnologia tale per cui la funzione di costo totale è $CT = 10q - 5q^2 + q^3$. Calcolare il prezzo di equilibrio di lungo periodo di questo bene.

Soluzione:

Data la funzione di costo totale, per determinare il prezzo di equilibrio di lungo periodo occorre determinare il minimo del costo medio la cui equazione è

$$CM = \frac{TC}{q} = 10 - 5q + q^2.$$

Attraverso la condizione del primo ordine, si ottiene

$$\frac{\partial CM}{\partial q} = 0 \Rightarrow -5 + 2q = 0 \Rightarrow q_A = 2.5.$$

Sostituendo q_A in $CM(q)$, si ottiene

$$p_A = CM(2.5) = 10 - 5 \cdot 2.5 + 2.5^2 = 3.75\text{€}.$$

Esercizio 7.5

In un mercato di concorrenza perfetta la funzione di costo totale, identica per tutte le imprese, è $CT = 10 + 2q + q^2$. Ipotizzando che sul mercato operino $n = 100$ imprese e che la funzione aggregata di domanda sia $Q^d = 200 - 10p$, si determini il prezzo di breve periodo.

Soluzione:

Nel breve periodo ogni impresa sceglie quanto produrre eguagliando il prezzo al costo marginale, quindi risulta

$$p = C' \Rightarrow p = 2 + 2q \Rightarrow q^* = \frac{p}{2} - 1$$

che corrisponde alla funzione di offerta della singola impresa.

Dato che sul mercato operano $n = 100$ imprese identiche, la funzione di offerta aggregata è data da

$$Q^s = 100q^* = 100\left(\frac{p}{2} - 1\right) = 50p - 100.$$

Nel breve periodo il prezzo sul mercato è definito dall'uguaglianza tra domanda e offerta, quindi risulta

$$Q^d = Q^s \Rightarrow 200 - 10p = 50p - 100 \Rightarrow p^* = 5\text{€}.$$

Si noti che, per $p^* = 5\text{€}$, la quantità prodotta da ciascuna impresa è $q^* = 1.5$ alla quale corrisponde un profitto pari a

$$\Pi = RT(q^*) - CT(q^*) = p^*q^* - (10 + 2q^* + q^{*2}) = 5 \cdot 1.5 - (10 + 2 \cdot 1.5 + 1.5^2) = -7.75\text{€}.$$

Il profitto di ogni impresa è negativo; questo significa che sul mercato stanno operando troppe imprese e che il loro numero è destinato a ridursi nel lungo periodo.

Esercizio 7.6

Le imprese alimentari acquistano materie prime (X) in un mercato agricolo di concorrenza perfetta caratterizzato dalla curva di offerta aggregata $X = 500p_X$. Le imprese alimentari utilizzano la materia prima per la produzione di un bene (q) per il quale vale la funzione di produzione di breve periodo $q = x^{0.5}$, dove q è la quantità prodotta dalla singola impresa alimentare, x è la quantità di materie prime impiegata dalla singola impresa. Le imprese alimentari, tutte uguali, sono $n = 125$. Il bene q viene venduto in un mercato in concorrenza perfetta al prezzo $p_q = 4\text{€}$. Determinare il prezzo delle materie prime.

Soluzione:

L'esercizio chiede di calcolare il prezzo delle materie prime che è definito dall'uguaglianza tra quantità domandata e quantità offerta. Sul mercato delle materie prime, la funzione di offerta aggregata è nota e ha equazione $X^S = 500p_X$; la relativa domanda proviene dal settore alimentare che usa le materie prime come fattore produttivo. È quindi necessario calcolare la funzione di domanda di materie prime da parte del settore alimentare, dove il prezzo di vendita del prodotto è $p_q = 4\text{€}$. La funzione di produzione di ogni impresa, che utilizza solo materie prime nel suo processo produttivo è data $q = x^{0.5}$. La funzione di profitto di una generica impresa che opera nel settore alimentare è quindi data da

$$\Pi_q = 4q - p_x x = 4x^{0.5} - p_x x.$$

Massimizzando il profitto rispetto x , si ottiene la funzione di domanda di materie prime da parte della singola impresa alimentare; dalla condizione del primo ordine si ottiene

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0 \Rightarrow 2x^{-0.5} = p_x \Rightarrow x^* = \frac{4}{p_x^2}.$$

Sul mercato operano $n = 125$ imprese alimentari, quindi la funzione di domanda di mercato sarà

$$X^d = 125x^* = \frac{500}{p_x^2}.$$

Dall'uguaglianza tra domanda aggregata e offerta aggregata di materie prime si ottiene

$$X^d = X^s \Rightarrow \frac{500}{p_x^2} = 500p_x \Rightarrow p_x^3 = 1 \Rightarrow p_x^* = 1\text{€}.$$

Capitolo 8

Esercizio 8.1

Due imprese, che producono rispettivamente il bene x e il bene y , presentano le funzioni di produzione $= \sqrt{L_x K_x}$ e $y = \sqrt{L_y K_y}$. Sapendo che la disponibilità totale del fattore produttivo lavoro è $L = L_x + L_y = 8$ e quella del fattore produttivo capitale è $K = K_x + K_y = 12$, si determini la funzione della frontiera delle possibilità produttive.

Soluzione:

Le due imprese utilizzano la stessa tecnologia (stessa funzione di produzione), quindi il saggio marginale di sostituzione tecnica tra lavoro e capitale è rispettivamente dato da

$$|\text{SMST}(L_x, K_x)| = \frac{K_x}{L_x} \quad \text{e} \quad |\text{SMST}(L_y, K_y)| = \frac{K_y}{L_y} \quad \Rightarrow \quad |\text{SMST}(L_y, K_y)| = \frac{12 - K_x}{8 - L_x},$$

dove l'ultima equazione è scritta considerando il vincolo sulle dotazioni di fattori produttivi.

La frontiera delle possibilità produttive richiede che i saggi marginali di sostituzione tecnica tra le due imprese siano uguali tra di loro, cioè deve valere

$$\text{SMST}(L_x, K_x) = \text{SMST}(L_y, K - Y) \quad \Rightarrow \quad \frac{K_x}{L_x} = \frac{12 - K_x}{8 - L_x} \quad \Rightarrow \quad K_x = \frac{3}{2} L_x$$

che rappresenta l'equazione della curva dei contratti efficienti.

Sostituendo la curva dei contratti efficienti nella funzione di produzione dell'impresa che produce il bene x , si ottiene

$$x = \sqrt{\left(\frac{3}{2} L_x\right) L_x} = \sqrt{\frac{3}{2}} L_x.$$

Sostituendo la curva dei contratti nella funzione di produzione dell'impresa che produce il bene y e, tenendo conto che $K_y = 12 - K_x$ e che $L_y = 8 - L_x$, si ottiene

$$y = \sqrt{\left(12 - \frac{3}{2} L_x\right) (8 - L_x)}.$$

Dato che l'obiettivo è definire la frontiera delle possibilità produttive, cioè una relazione tra la quantità massima producibile del bene y e del bene x nell'intero sistema economico, è necessario

- calcolare L_x dalla funzione di produzione del bene x , ottenendo così $L_x = \sqrt{\frac{2}{3}} x$,
- sostituire questo risultato nella funzione di produzione del bene y , determinando così

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\left(12 - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} x\right) \left(8 - \sqrt{\frac{2}{3}} x\right)} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2} \left(8 - \sqrt{\frac{2}{3}} x\right) \left(8 - \sqrt{\frac{2}{3}} x\right)} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2} \left(8 - \sqrt{\frac{2}{3}} x\right)} \\ &= \sqrt{96} - x. \end{aligned}$$

La frontiera delle possibilità produttive è quindi una retta con inclinazione unitaria negativa ed intercette verticale e orizzontale entrambe pari a $\sqrt{96} \approx 9.7980$.

Esercizio 8.2

Si considerino due individui A e B che hanno la stessa funzione di utilità $u_i = x_{1i}^{0.5} x_{2i}^{0.5}$, con $i = A, B$, che dispongono delle dotazioni iniziali indicate nella seguente tabella.

dotazioni:	x_1	x_2
individuo A	75	25
individuo B	25	75
Totale	100	100

Sapendo che i prezzi dei beni sono $p_1 = p_2 = 1\text{€}$, si stabilisca se la configurazione data dalle relazioni

$$x_{1A}^* = x_{2A}^*$$

rappresenta un'allocazione Pareto-efficiente in una situazione di puro scambio tra i due individui descritti. Si calcoli x_{1A}^* . Si dica quanto l'individuo A cederà di bene 1.

Soluzione:

L'esercizio chiede se un certo paniere di beni consumato dai due individui (che dispongono di date dotazioni iniziali) rappresenta o meno un equilibrio Pareto-efficiente. Dall'analisi svolta nel testo, emerge che equilibrio efficiente deve trovarsi lungo la curva dei contratti, che è definita dall'uguaglianza dei saggi marginali di sostituzione tra i due individui.

Dato che la somma delle dotazioni iniziali è pari a 100 per entrambi i beni x_1 e x_2 , eguagliando i saggi marginali di sostituzione, si ottiene

$$\text{SMS}(x_{1A}, x_{2A}) = \text{SMS}(x_{1B}, x_{2B}) \Rightarrow \frac{x_{2A}}{x_{1A}} = \frac{x_{2B}}{x_{1B}} \Rightarrow \frac{x_{2A}}{x_{1A}} = \frac{100 - x_{2A}}{100 - x_{1A}} \Rightarrow x_{1A}^* = x_{2A}^*.$$

In equilibrio, la quantità del bene x_1 e quella del bene x_2 consumate dall'individuo A devono essere tra loro uguali. Poiché la dotazione totale dei due beni è pari a 100, anche l'individuo B dovrà consumare i due beni in quantità tra loro uguali.

Per prezzi dei beni x_1 e x_2 pari a $p_1 = p_2 = 1\text{€}$, dal vincolo di bilancio dell'individuo A riportato in tabella, dopo lo scambio deve risultare

$$1 \cdot x_{1A}^* + 1 \cdot x_{2A}^* = 100 \Rightarrow 2x_{1A}^* = 100 \Rightarrow x_{1A}^* = x_{2A}^* = 50.$$

Dato che l'individuo A disponeva di $x_{1A}^0 = 75$ unità del bene 1, ne cederà quindi $x_{1A}^* - x_{1A}^0 = 50 - 75 = -25$, acquistando al contempo $x_{2A}^* - x_{2A}^0 = 25$ unità del bene 2. Di conseguenza, l'individuo B si troverà ad acquistare 25 unità di x_1 cedute dall'individuo A , mentre a questi venderà 25 unità del bene x_2 , ottenendo anch'egli un equilibrio dato da

$$x_{1B}^* = x_{2B}^* = 50.$$

Questa configurazione data dalle relazioni è Pareto-efficiente, in quanto i corrispondenti valori di equilibrio si trovano effettivamente sulla curva dei contratti.

Esercizio 8.3

Siano $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$ le dotazioni totali dei beni in un sistema economico composto da due individui, A e B . Il saggio marginale di sostituzione tra i due beni per l'individuo A è dato da

$$\text{SMS}(x_{1A}, x_{2A}) = -2 \frac{x_{2A}}{x_{1A}},$$

dove x_{1A} e x_{2A} indicano le quantità dei due beni consumate dall'individuo A .

Il saggio marginale di sostituzione tra i beni x_1 e x_2 per l'individuo B è dato da

$$\text{SMS}(x_{1B}, x_{2B}) = -\frac{x_{2B}}{x_{1B}} = -\frac{1 - x_{2A}}{1 - x_{1A}}.$$

dove x_{1B} e x_{2B} indicano le quantità dei due beni consumate dall'individuo B .

Si determini l'equazione della curva dei contratti.

Soluzione:

L'esercizio fornisce i saggi marginali di sostituzione tra i beni x_1 e x_2 per due individui, A e B , le dotazioni iniziali dei due beni, $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$, e chiede di calcolare l'equazione della curva dei contratti, che è definita dall'uguaglianza tra i saggi marginali di sostituzione dei due individui. L'equazione:

$$\begin{aligned} \text{SMS}(x_{1A}, x_{2A}) = \text{SMS}(x_{1B}, x_{2B}) &\Rightarrow 2 \frac{x_{2A}}{x_{1A}} = \frac{1 - x_{2A}}{1 - x_{1A}} \\ &\Rightarrow 2x_{2A}(1 - x_{1A}) = (1 - x_{2A})x_{1A} \\ &\Rightarrow x_{2A} = \frac{x_{1A}}{2 - x_{1A}} \end{aligned}$$

definisce quindi la curva dei contratti che in questo caso è una curva crescente con concavità verso l'alto (la derivata seconda di x_{2A} rispetto x_{1A} è positiva).

Esercizio 8.4

In un sistema economico, con la frontiera delle possibilità produttive data dall'equazione $x_2 = 100 - x_1^2$, si produce $x_1 = x_{1A} + x_{1B} = 4$. L'individuo A ottiene il 75% della produzione di x_1 ed il 20% della produzione di x_2 . Si determinino le dotazioni iniziali dei beni x_1 e x_2 dei due individui.

Soluzione:

Dalla frontiera delle possibilità produttive, data la quantità prodotta del bene x_1 ($x_1 = 4$), è possibile calcolare quanto nell'intero sistema economico si produce del bene x_2 , infatti risulta

$$x_2 = 100 - x_1^2 = 100 - 16 = 84.$$

Dato che l'individuo A ottiene il 75% dell'intera produzione di $x_1 = 4$, risulta

$$x_{1A} = 4 \cdot 75\% = 3 \quad \text{e} \quad x_{1B} = x_1 - x_{1A} = 4 - 3 = 1.$$

Poiché che l'individuo A ottiene il 20% della produzione di $x_2 = 84$, risulta

$$x_{2A} = 84 \cdot 20\% = 21 \quad \text{e} \quad x_{2B} = x_2 - x_{2A} = 84 - 21 = 63.$$

Tutte queste quantità rappresentano le dotazioni iniziali dei beni con cui i due individui si presentano sul mercato, dove potranno poi effettuare scambi al fine di ottenere un'utilità più elevata.

Esercizio 8.5

Sia $x_2 = 10 - x_1$ l'equazione della frontiera delle possibilità produttive. Le funzioni di utilità dei due agenti sono uguali e vale la condizione $|\text{SMS}(x_{1A}, x_{2A})| = \frac{x_{2A}}{2x_{1A}}$ e $|\text{SMS}(x_{1B}, x_{2B})| = \frac{x_2 - x_{2A}}{2(x_1 - x_{1A})}$. Si calcolino le dotazioni iniziali di beni nell'ipotesi che i fattori produttivi lavoro e capitale siano per metà di proprietà dell'individuo A e per metà dell'individuo B . I due individui scambieranno tra di loro una parte delle loro dotazioni di beni? Se la risposta è affermativa, a quanto ammontano tali quantità scambiate?

Soluzione:

Nel testo proposto dall'esercizio, x_1 e x_2 sono le quantità totali dei beni disponibili, quelle che definiscono la frontiera delle possibilità produttive, mentre x_{1A} e x_{2A} sono invece le quantità dei due beni consumate dall'individuo A .

L'equilibrio economico generale è definito dall'equazione (8.9) la quale stabilisce l'uguaglianza tra la pendenza della frontiera delle possibilità produttive e quella del saggio marginale di sostituzione dei due individui. Dato che, se $x_2 = 10 - x_1$, la frontiera delle possibilità produttive ha equazione lineare con coefficiente angolare pari a -1 , allora devono valere

$$|\text{SMS}(x_{1A}, x_{2A})| = 1 \quad \text{e} \quad |\text{SMS}(x_{1B}, x_{2B})| = 1,$$

cioè:

$$\begin{cases} \frac{x_{2A}}{2x_{1A}} = 1 & \Rightarrow \quad x_{2A} = 2x_{1A} \\ \frac{x_2 - x_{2A}}{2(x_1 - x_{1A})} = 1 & \Rightarrow \quad x_2 - x_{2A} = 2(x_1 - x_{1A}). \end{cases}$$

Sostituendo la prima equazione del sistema nella seconda, si ottiene

$$x_2 = 2x_1.$$

Sostituendo questo risultato all'interno della frontiera delle possibilità produttive, risulta

$$2x_1 = 10 - x_1 \quad \Rightarrow \quad x_1^* = \frac{10}{3} \quad \text{e} \quad x_2^* = \frac{20}{3}.$$

Dato che entrambi i fattori produttivi sono di proprietà per metà di ognuno dei due individui, le dotazioni di beni dell'individuo A saranno pari a metà della produzione di ognuno dei due beni

$$x_{1A} = \frac{5}{3} \quad \text{e} \quad x_{2A} = \frac{10}{3}.$$

Soluzioni degli Esercizi

L'altra metà della produzione totale andrà all'individuo *B*.

Dato che il valore assoluto del saggio marginale di sostituzione dei due individui è pari all'unità, di fatto la loro uguaglianza è verificata, quindi le dotazioni iniziali costituiscono anche allocazioni Pareto-efficienti, in quanto sono già situate sulla curva dei contratti efficienti nel consumo. In questo caso non ci sarà bisogno di nessuno scambio.

Capitolo 9

Esercizio 9.1

In un mercato di monopolio, una pizzeria produce pizze da asporto al costo costante di 3€ l'una; sapendo che l'elasticità della domanda al prezzo è, in valore assoluto, pari a 1.5, quale prezzo dovrebbe fissare per massimizzare il suo profitto?

Soluzione:

Dato che il costo marginale (costante) è $C' = 3€$ e risulta $|\epsilon_{q,p}| = 1.5$, la pizzeria ottiene il massimo profitto quando

$$C' = R' \Rightarrow C' = p \left(1 - \frac{1}{|\epsilon_{q,p}|} \right) \Rightarrow 3 = p \left(1 - \frac{1}{1.5} \right) \Rightarrow 3 = \frac{p}{3},$$

quindi $p^* = 9€$.

Esercizio 9.2

Una gelateria in concorrenza monopolistica massimizza il suo profitto vendendo ogni giorno coni gelato al prezzo unitario di 2.5€; si determini l'ammontare del costo marginale giornaliero della gelateria sapendo l'elasticità della domanda al prezzo è pari a $|\epsilon_{Q,p}| = 2.5$.

Soluzione:

Dato che il prezzo del gelato è $p = 2.5€$ e risulta $|\epsilon_{Q,p}| = 2.5$, il costo marginale della gelateria ammonta a

$$C' = R' = p \left(1 - \frac{1}{|\epsilon_{q,p}|} \right) = 2.5 \left(1 - \frac{1}{2.5} \right) = 1.50€.$$

Esercizio 9.3

Un negozio di abbigliamento in concorrenza monopolistica, nel breve periodo acquista camicie direttamente dal fornitore al costo di 50€ al pezzo. Sapendo che l'elasticità della domanda al prezzo in valore assoluto è pari a 3 quale prezzo di vendita (p^*) dovrebbe applicare per massimizzare il profitto?

Soluzione:

Dato che il costo marginale (costante) è $C' = 50\text{€}$ e risulta $|\varepsilon_{q,p}| = 3$, il negozio di abbigliamento ottiene il massimo profitto quando

$$C' = R' \Rightarrow C' = p \left(1 - \frac{1}{|\varepsilon_{q,p}|} \right) \Rightarrow 50 = p \left(1 - \frac{1}{3} \right) \Rightarrow 50 = \frac{2}{3}p,$$

quindi $p^* = \frac{3}{2}50 = 75\text{€}$.

Esercizio 9.4

Uno studente è riuscito ad ottenere una copia della prova scritta dell'esame di Economia Politica. Egli permette agli altri studenti di copiare il testo dietro il pagamento di un prezzo. Sapendo che l'elasticità della domanda al prezzo, in valore assoluto, è data da $|\varepsilon_{Q,p}| = \frac{2Q^2}{20100 - Q}$, dove Q indica il numero di compiti che vende, quante copie venderà se il suo obiettivo è di massimizzare il suo profitto e se il costo di ogni copia è pari a zero?

Soluzione:

Dato che lo studente è monopolista, poiché è l'unico a disporre della prova scritta, deve valere $\varepsilon_{Q,q_i} = 1$. Dall'equazione (9.17) del testo emerge che il massimo profitto si ottiene quando il valore del costo marginale è uguale all'inverso dell'elasticità della domanda al prezzo più uno, cioè

$$C' = \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_{Q,p}} \right) p.$$

Nel caso proposto dall'esercizio il costo marginale è pari a zero, quindi risulta

$$\left(\frac{1}{\varepsilon_{Q,p}} + 1 \right) p = 0 \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon_{Q,p}} = -1 \Rightarrow \varepsilon_{Q,p} = -1.$$

Il testo fornisce la funzione dell'elasticità della domanda al prezzo (in valore assoluto); alla luce delle considerazioni precedenti dovrà allora valere

$$\frac{2Q^2}{20100 - Q} = 1 \Rightarrow 2Q^2 + Q - 20100 = 0 \Rightarrow Q = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 160800}}{2} = \frac{-1 \pm 401}{2}$$

da cui si ottiene $Q^* = 100$ che è l'unica soluzione positiva la quale rappresenta il numero delle copie dell'esame di economia che saranno vendute.

Esercizio 9.5

Un monopolista con funzione di domanda $p = 96 - 6q$ ha fissato il prezzo $p = 54\text{€}$ in modo da massimizzare i profitti. Si calcoli il *mark-up*.

Soluzione:

Poiché la funzione di domanda del monopolista è $q = 16 - \frac{p}{6}$ Fissando il prezzo a $p = 54\text{€}$, il monopolista vende la quantità

$$96 - 6q = 58 \Rightarrow q^* = \frac{96 - 54}{6} = \frac{42}{6} = 7.$$

In corrispondenza di tale quantità, l'elasticità della domanda al prezzo è

$$\varepsilon_{q^*,p} = \frac{\partial q}{\partial p} \frac{p}{q} = -\frac{1}{6} \frac{p}{96 - p} = -\frac{54}{96 - 54} = -\frac{9}{7} \approx -1.2857,$$

mentre il ricavo marginale del monopolista è

$$R' = \frac{\partial RT}{\partial q} = \frac{\partial(pq)}{\partial q} = \frac{\partial(96q - 6q^2)}{\partial q} = 96 - 12q = 96 - 12 \cdot 7 = 12\text{€}.$$

Dato che $R' = \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_{q,p}}\right)p$, in corrispondenza dell'equilibrio del monopolista il *mark up* è pari a

$$m^* = \frac{p}{C'} = \frac{p}{R'} = \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_{q,p}}\right)^{-1} = \frac{\varepsilon_{q,p}}{\varepsilon_{q,p} + 1} = \frac{-9/7}{-9/7 + 1} = 4.5.$$

Esercizio 9.6

Si supponga che in un certo mercato operino due imprese ($n = 2$), che la funzione di domanda aggregata sia data da $Q = p^{-2}$ e che l'impresa 1 si aspetti che l'impresa 2 mantenga costante la quantità venduta, cioè valga la condizione $\partial Q / \partial q_1 = 1$. Se il costo marginale è costante e pari a $C' = 3\text{€}$, a quanto ammontano il *mark-up* ed il prezzo di vendita del prodotto?

Soluzione:

Per calcolare il *mark up* si può ricorrere all'equazione (9.19) data da

$$m^* = \frac{\varepsilon_{Q,p}}{\varepsilon_{Q,p} + \varepsilon_{Q,q_1}}.$$

Innanzitutto occorre determinare il valore dell'elasticità della domanda al prezzo che risulta essere $\varepsilon_{q,p} = -2$, in quanto la funzione di domanda è isoelastica.

In secondo luogo occorre determinare l'elasticità della produzione aggregata rispetto alla quantità prodotta dall'impresa 1 che risulta essere

$$\varepsilon_{Q,q_1} = \frac{\partial Q}{\partial q_1} \frac{q_1}{Q} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Rimettendo insieme questi risultati, si ottiene

$$m^* = \frac{-2}{-2 + \frac{1}{2}} = \frac{-2 \cdot 2}{-4 + 1} = \frac{4}{3} \approx 1.3333.$$

Il prezzo di vendita del prodotto sarà perciò

$$p^* = m^* C' = \frac{4}{3} \cdot 3 = 4\text{€}.$$

Capitolo 10

Esercizio 10.1

Si determini il profitto conseguito da un monopolista, sapendo che la sua funzione di costo medio è $CM = Q + \frac{400}{Q}$ e che la domanda di mercato ha equazione $p = 120 - 2Q$.

Soluzione:

Dalla funzione di costo medio si determina agevolmente la funzione di costo totale $CT = Q^2 + 400$, quindi anche quella di costo marginale $C' = \frac{\partial CT}{\partial Q} = 2Q$. Poiché la funzione inversa di domanda è lineare, il ricavo marginale è anch'esso lineare con funzione che ha la stessa intercetta ma il doppio del coefficiente angolare, quindi risulta

$$R' = 120 - 4Q.$$

Affinché il monopolista sia in equilibrio, la condizione fondamentale è

$$R' = C' \Rightarrow 120 - 4Q = 2Q \Rightarrow 6Q = 120 \Rightarrow Q^* = 20$$

a cui, sostituendo all'interno della funzione inversa di domanda, corrisponde il prezzo di vendita $p^* = 120 - 2 \cdot 20 = 80\text{€}$.

Il profitto dell'impresa è

$$\Pi = RT - CT = p^* Q^* - (Q^{*2} + 400) = 80 \cdot 20 - 20^2 - 400 = 800\text{€}.$$

Esercizio 10.2

Volete organizzare una serata in discoteca per una festa di facoltà. Il costo per affittare la discoteca è di 9000€ e la sua capienza massima è di 1000 persone. Sapete che la funzione di domanda di biglietti è $B = 3000 - 100p_B$, dove B è il numero di biglietti e p_B è il prezzo del singolo biglietto. Si determini il profitto massimo che potete ottenere.

Soluzione:

Dalle indicazioni fornite dal testo, emerge che l'organizzazione della festa comporta soltanto costi fissi, quindi i costi marginali sono nulli ($C' = 0$). Pertanto, la massimizzazione del profitto richiede semplicemente che i ricavi marginali siano pari a zero. Data la funzione di domanda, la sua funzione inversa è

$$p_B = 30 - \frac{1}{100}B$$

dove B è il numero di biglietti e p_B il prezzo di ogni biglietto. Dalla condizione di equilibrio risulta

$$R'_B = 0 \Rightarrow 30 - \frac{1}{50}B = 0 \Rightarrow B = 1500$$

È quindi conveniente fare entrare 1500 persone, fissare un prezzo del biglietto di ingresso pari a $p_B = 30 - \frac{1}{100}1500 = 15\text{€}$ e ottenere un profitto pari a

$$\Pi = 15 \cdot 1500 - 9000 = 13\,500\text{€}.$$

Poiché la discoteca ha una capienza massima di 1000 persone, l'ingresso di 1500 persone non è possibile. Dato questo limite di capienza, non è più razionale fissare il prezzo del biglietto a $p_B = 15\text{€}$, ma sarà opportuno fissarlo ad un livello tale che entrino precisamente 1000 persone ($B^* = 1000$). Tale livello è

$$p_B^* = 30 - \frac{1}{100} \cdot 1000 = 20\text{€}.$$

In corrispondenza di questo prezzo il profitto ammonta a

$$\Pi = 20 \cdot 1000 - 9000 = 11\,000\text{€}.$$

Il fatto che la discoteca è troppo “piccola”, fa guadagnare 2500€ in meno ($\Delta\Pi = 11\,000 - 13\,500 = -2500$).

Esercizio 10.3

Un monopolista vende un prodotto il cui costo marginale è costante pari a $C' = 500\text{€}$. La curva inversa di domanda di mercato ha equazione $p = 1000 - Q$. Si determini il valore dell'elasticità della domanda al prezzo se il monopolista massimizza il profitto.

Soluzione:

L'uguaglianza tra ricavo marginale e costo marginale definisce la produzione ottimale del monopolista. Nel caso di funzione di domanda lineare, il ricavo marginale è una retta con intercetta pari a quella della funzione inversa di domanda e pendenza doppia, quindi risulta

$$1000 - 2Q = 500 \quad \Rightarrow \quad Q^* = 250,$$

da cui $p^* = 750\text{€}$. Questo è il prezzo che sarà fissato dal monopolista, perché è quello che massimizza il profitto. Il testo richiede il valore dell'elasticità nella situazione di ottimo. Dato che la funzione di domanda è data da $Q = 1000 - p$, vale

$$\varepsilon_{Q,p} = \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{p}{Q} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{Q,p} = -1 \cdot \frac{750}{250} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{Q,p} = -3.$$

Esercizio 10.4

Un monopolista vende un prodotto il cui costo marginale è costante pari a $C' = 300\text{€}$. La curva inversa di domanda di mercato ha equazione $p = 1000 - Q$. Si determinino il valore di profitto del monopolista ed il surplus dei consumatori.

Soluzione:

Soluzioni degli Esercizi

Per calcolare il profitto del monopolista occorre eguagliare ricavo marginale e costo marginale, quindi risulta

$$1000 - 2Q = 300 \Rightarrow Q^* = 350,$$

da cui si ottiene $p^* = 650\text{€}$.

Sapendo che il costo marginale è costante e supponendo che l'impresa non sostenga costi fissi (che altrimenti dovrebbero essere semplicemente detratti dal profitto), il costo medio deve essere uguale al costo marginale. Il profitto è allora dato da

$$\Pi = 650 \cdot 350 - 300 \cdot 350 \Rightarrow \Pi = 122\,500\text{€}.$$

Il surplus dei consumatori è dato dalla differenza tra intercetta verticale della curva inversa di domanda e prezzo, moltiplicata per la quantità e divisa per 2, quindi vale

$$SC = \frac{(1000 - 650) \cdot 350}{2} = 61\,250\text{€}.$$

Se il mercato fosse concorrenziale allora il prezzo sarebbe uguale al costo medio minimo, pari a $CM_{\min} = 300\text{€}$. Per $p = 300\text{€}$ i consumatori acquisterebbero $Q = 700$ unità del bene. In questo caso il surplus dei consumatori sarebbe pari a

$$SC = \frac{(1000 - 300) \cdot 700}{2} = 245\,000\text{€}$$

La perdita di surplus dei consumatori causata dall'esistenza del monopolio è pari allora a $\Delta SC = 245\,000 - 61\,250 = 183\,750\text{€}$.

Esercizio 10.5

In una stazione sciistica il gestore degli impianti sa che la funzione di domanda è data da $N = 3000 - 20p$, dove N è il numero di persone che acquista lo *skipass* giornaliero e p è il prezzo dello *skipass*. Supponendo che i costi della gestione degli impianti non dipendano dal numero degli sciatori, ma siano costituiti solo da costi fissi, si calcoli il prezzo dello *skipass* che massimizza il profitto dell'impresa.

Soluzione:

È possibile risolvere l'esercizio in due modi:

1. considerando l'uguaglianza tra ricavo marginale e costo marginale (che in questo caso è pari a zero);
2. imponendo che il valore assoluto dell'elasticità della domanda sia unitario, perché questo valore massimizza la spesa dei consumatori, quindi massimizza i ricavi del monopolista e, dato che i costi marginali sono pari a zero, anche il suo profitto.

Utilizzando il primo metodo, si deve innanzitutto calcolare la funzione inversa di domanda data da

$$p = 150 - \frac{1}{20}N$$

dalla quale si ottiene la funzione di ricavo marginale

$$R' = 150 - \frac{1}{10}N.$$

Ponendo il ricavo marginale pari a zero, otteniamo $N^* = 1500$ e $p^* = 75\text{€}$.

Il secondo metodo con cui ottenere prezzo e produzione ottimali richiede $|\varepsilon_{N,p}| = 1$. Per calcolare l'elasticità della domanda si utilizza la funzione di domanda proposta nel testo dell'esercizio, quindi risulta

$$\varepsilon_{N,p} = \frac{\partial N}{\partial p} \frac{p}{N} = -20 \frac{p}{3000 - 20p} \Rightarrow 20p = 3000 - 20p \Rightarrow p^* = \frac{3000}{40} = 75\text{€}.$$

Esercizio 10.6

Un'impresa monopolistica sostiene solo un costo fisso, quindi la sua funzione di costo totale ammonta a $CT = 5400\text{€}$. Sapendo che comportandosi in modo ottimale ottiene profitti pari a $\Pi = 5000\text{€}$ e che il suo ricavo marginale è nullo per $Q = 200$, cioè $R'(200) = 0\text{€}$, si calcoli il prezzo di vendita.

Soluzione:

Il monopolista è in equilibrio quando il suo costo marginale eguaglia il ricavo marginale. Poiché l'impresa sostiene solo un costo fisso, il costo marginale è nullo; inoltre il testo indica che anche il ricavo marginale è nullo quando l'impresa produce la quantità $Q = 200$. Tale quantità corrisponde quindi alla quantità di equilibrio e, siccome il ricavo marginale è nullo, tale quantità di equilibrio massimizza sia il profitto, sia il ricavo totale dell'impresa.

Dalla funzione di profitto, risulta

$$\Pi = RT - CT = pQ - CT = 200p - 5400 \Rightarrow p^* = \frac{5400}{200} = 27\text{€}.$$

Esercizio 10.7

Il gas metano viene fornito in condizioni di monopolio naturale da un'impresa pubblica la quale presenta una funzione dei costi totali $CT = 15 + 44Q$. La funzione inversa di domanda del gas è $p = 60 - Q$. Assumendo che l'impresa pubblica abbia l'obiettivo del pareggio di bilancio, stabilite la quantità massima di gas venduta.

Soluzione:

Nel caso dell'impresa pubblica, l'equilibrio non è stabilito dall'uguaglianza tra costo marginale e ricavo marginale, bensì dall'uguaglianza tra costo medio e ricavo medio che garantisce il pareggio di bilancio. Dato che la funzione inversa di domanda corrisponde al ricavo medio, risulta

$$p = \frac{CT}{Q} \Rightarrow 60 - Q = \frac{15}{Q} + 44 \Rightarrow Q^2 - 16Q + 15 = 0 \Rightarrow Q^* = \frac{8 + \sqrt{64 - 15}}{2} = 8.$$

La soluzione $Q = \frac{8-7}{2} = 0.5$ viene scartata poiché il testo richiede la quantità massima venduta di gas.

Esercizio 10.8

Il mercato di un bene è caratterizzato da monopolio naturale. La funzione di costo medio è infatti $CM = 30 - Q$, dove Q è la quantità prodotta. La funzione di domanda è $p = 60 - 6Q$, dove p è il prezzo. Se lo Stato decidesse di nazionalizzare la produzione di questo bene e si ponesse l'obiettivo di raggiungere la massima efficienza (prezzo uguale al costo medio), a quale livello dovrebbe fissare il prezzo di vendita?

Soluzione:

Se lo Stato decidesse di nazionalizzare la produzione, dovrebbe fissare il prezzo eguagliando il ricavo medio al costo medio in modo da ottenere il pareggio di bilancio. In questo caso risulterebbe

$$p = CM \Rightarrow 60 - 6Q = 30 - Q \Rightarrow 5Q = 30 \Rightarrow Q^* = 6.$$

Dalla funzione inversa di domanda (o di ricavo medio), si ottiene quindi $p^* = 60 - 6Q^* = 24\text{€}$.

Esercizio 10.9

La funzione di domanda di un servizio di pubblica utilità è $p = 20 - Q$. Tale servizio, fornito in condizioni di monopolio naturale, prevede la funzione di costo totale $CT = 16 + 10Q$. Tale servizio può essere svolto da un monopolista privato. Oppure può essere affidato ad un'impresa pubblica che deve produrre la quantità più alta possibile e, al tempo stesso, coprire tutti i costi con i ricavi, ottenendo quindi profitti nulli. Si determini l'incremento di quantità che si ottiene affidando il servizio all'impresa pubblica.

Soluzione:

Se il servizio viene erogato da un'azienda privata, l'equilibrio è ottenuto attraverso l'uguaglianza tra ricavo marginale e costo marginale, quindi risulta

$$R' = C' \Rightarrow \frac{\partial(20Q - Q^2)}{\partial Q} = \frac{\partial(16 + 10Q)}{\partial Q} \Rightarrow 20 - 2Q = 10 \Rightarrow Q_{\text{priv}} = 5.$$

Nazionalizzando l'impresa, l'obiettivo diventa il pareggio di bilancio, quindi l'impresa eguaglierà il ricavo medio al costo medio; in formule risulta

$$RM = CM \Rightarrow p = \frac{CT}{Q} \Rightarrow 20 - Q = \frac{16}{Q} + 10 \Rightarrow Q^2 - 10Q + 16 = 0.$$

Risolvendo si ottiene

$$Q_{\text{pubb}} = 5 + \sqrt{25 - 16} = 8$$

La soluzione $Q = 5 - \sqrt{25 - 16} = 2$ viene scartata poiché lo Stato eroga la quantità massima possibile.

L'incremento di quantità che si ottiene affidando il servizio all'impresa pubblica è pari a $\Delta Q = Q_{\text{pubb}} - Q_{\text{priv}} = 8 - 5 = 3$.

● ————— **Esercizio 10.10** ————— ●

Un'impresa monopolista di proprietà esclusiva del fondatore, alla morte di quest'ultimo, diventa una s.p.a. gestita dai manager. I manager decidono di cercare di guadagnare quote di mercato, e si pongono l'obiettivo di massimizzare le vendite con il vincolo di profitti non negativi. La funzione inversa di domanda è $p = 50 - 2Q$.

La funzione di produzione ha rendimenti di scala costanti. Il costo medio è pari a 20€. Si calcoli la variazione di produzione e la variazione di prezzo dovute a tale modifica della funzione obiettivo.

Soluzione:

Poiché la funzione di produzione è a rendimenti di scala costanti, allora costo medio e costo marginale coincidono, quindi risulta $CM = C' = 20\text{€}$. Se l'obiettivo è la massimizzazione del profitto, vale la condizione di uguaglianza tra ricavo marginale e costo marginale, quindi risulta

$$R' = C' \Rightarrow 50 - 4Q = 20 \Rightarrow Q^* = 7.5$$

da cui, sostituendo all'interno della funzione inversa di domanda, si ottiene $p^* = 35\text{€}$.

Se invece l'obiettivo è quello della massimizzazione delle vendite, ai manager conviene fissare un prezzo di vendita pari al costo medio. Infatti, per prezzi inferiori, il profitto sarebbe negativo (e questo è escluso dal testo), mentre per prezzi superiori, le quantità vendute sarebbero inferiori, quindi i manager non avrebbero raggiunto l'obiettivo della massimizzazione delle vendite. Per $p = CM = 20\text{€}$, dalla funzione di domanda emerge che la quantità venduta è pari a $Q = 15$.

La variazione di prezzo dovuta al diverso obiettivo dei manager è quindi

$$\Delta p = 20 - 35 = -15\text{€},$$

mentre la variazione della produzione è pari a

$$\Delta Q = 15 - 7.5 = 7.5.$$

● ————— **Esercizio 10.11** ————— ●

Un'impresa monopolista privata produce con costi marginali costanti e pari a $c = 10\text{€}$. La funzione di domanda di mercato, in forma inversa, ha equazione $p = 34 - 2Q$.

Lo Stato decide di nazionalizzare l'impresa e gestirla in modo che l'obiettivo dell'impresa pubblica sia la massimizzazione delle vendite con profitti non negativi. I costi marginali, costanti dell'impresa pubblica sono però dati da $C' = 18\text{€}$ a causa dell'inefficienza X. Si calcoli la variazione del surplus dei consumatori dovuta alla nazionalizzazione, indicando il segno.

Soluzione:

L'esercizio propone una situazione in cui l'impresa monopolistica pubblica, che è inefficiente rispetto all'impresa monopolistica privata (cioè sopporta costi più alti), ha l'obiettivo della massimizzazione delle vendite.

Soluzioni degli Esercizi

L'impresa monopolistica privata massimizza i profitti eguagliando il ricavo marginale al suo costo marginale, quindi risulta

$$R' = C' \Rightarrow 50 - 4Q = 10 \Rightarrow Q^* = 10.$$

Quindi, dalla funzione inversa di domanda, si ottiene $p^* = 30\text{€}$ a cui corrisponde un surplus dei consumatori pari a

$$SC = \frac{(50 - 30) \cdot 10}{2} = 100\text{€}.$$

L'impresa monopolistica pubblica massimizza le vendite eguagliando il prezzo al suo costo medio (pari al costo marginale), quindi risulta

$$p = CM \Rightarrow 50 - 2Q = 18 \Rightarrow Q^P = 16.$$

Quindi, dalla la funzione inversa di domanda, si ottiene $p^* = 18\text{€}$ a cui corrisponde un surplus dei consumatori dato da

$$SC^P = \frac{(50 - 18) \cdot 16}{2} = 256\text{EUR}.$$

Pertanto la variazione del surplus dei consumatori dovuta alla nazionalizzazione è data da $\Delta SC = SC^P - SC = 256 - 100 = 156\text{€}$.

I consumatori ottengono un maggior surplus se l'impresa è pubblica, anche se questa è meno efficiente dell'impresa privata.

Esercizio 10.12

Un'impresa monopolista ha funzione di costo marginale costante pari a $C' = 10\text{€}$ e costo fisso totale pari a $CF = 16000\text{€}$. La funzione inversa di domanda del mercato è $p = 210 - Q$. Se effettua una discriminazione perfetta del prezzo, quale è l'ammontare del suo profitto?

Soluzione:

L'impresa effettua una discriminazione perfetta del prezzo. Quindi fisserà prezzi differenziati per ogni consumatore e riuscirà ad appropriarsi di tutto il surplus dei consumatori.

Il prezzo minimo a cui l'impresa sarà disposta a vendere il suo prodotto dovrà comunque coprire il costo marginale, pari a $C' = 10\text{€}$. Dalla funzione inversa di domanda, per $p = C'$, risulta

$$210 - Q = 10 \Rightarrow Q^* = 200.$$

Il profitto dell'impresa monopolista perfettamente discriminante è dato dal surplus dei consumatori calcolato per $p^* = 10\text{€}$ e $Q^* = 200$ al netto dei costi fissi, quindi risulta

$$\Pi = SC - CF = \frac{(210 - 10)200}{2} - 16000 = 4000\text{€}.$$

• ————— **Esercizio 10.13** ————— •

Un'azienda municipalizzata vende il metano a 500 famiglie, ognuna delle quali presenta una funzione di domanda data da

$$Q_i^F = 1 - \frac{1}{1000}p.$$

La stessa impresa vende il metano anche a 500 imprese, ognuna delle quali presenta una funzione di domanda data da

$$Q_i^I = 2 - \frac{1}{2400}p.$$

Si supponga che questa impresa possa fissare tariffe differenziate per famiglie e imprese per la fornitura del metano. Quant'è l'ammontare del profitto dell'azienda municipalizzata se fissa un prezzo del metano pari a $p = 3\text{€}$ e una tariffa fissa (TF) tale che il surplus delle famiglie e delle imprese (i consumatori di metano) sia pari a zero?

Soluzione:

Se l'azienda municipalizzata vende il metano a 500 famiglie, la domanda aggregata delle famiglie è

$$Q^F = 500Q_i^F = 500\left(1 - \frac{1}{1000}p\right) = 500 - \frac{p}{2},$$

quindi la funzione inversa di domanda delle famiglie è $p = 1000 - 2Q^F$. Se il prezzo di vendita del prodotto è $p = 3\text{€}$, la quantità venduta alle famiglie è $Q^F = 500 - 1.5 = 498.5$ ed il surplus dei consumatori ammonta a

$$SC^F = \frac{498.5(1000 - 3)}{2} = 248\,502.25\text{€}.$$

Se l'azienda municipalizzata vende il metano a 500 imprese, la domanda aggregata delle famiglie è

$$Q^I = 500Q_i^I = 500\left(2 - \frac{1}{2400}p\right) = 1000 - \frac{5}{24}p,$$

quindi la funzione inversa di domanda delle famiglie è $p = 4800 - 4.8Q^I$. Se il prezzo di vendita del prodotto è $p = 3\text{€}$, la quantità venduta alle imprese è $Q^I = 4800 - 4.8 \cdot 3 = 4785.6$ ed il surplus dei consumatori ammonta a

$$SC^I = \frac{4785.6(4800 - 3)}{2} = 11\,478\,261.60\text{€}.$$

Affinché il surplus delle famiglie e delle imprese sia nullo, l'impresa municipalizzata deve appropriarsi dell'intero loro surplus, quindi il profitto ammonta

$$\Pi = SC^F + SC^I = 248\,502.25 + 11\,478\,261.60 = 11\,726\,763.85\text{€}.$$

• ————— **Esercizio 10.14** ————— •

Si considerino i dati del precedente relativo all'azienda municipalizzata che vende metano e si supponga che abbia un costo marginale costante pari a $C' = 200\text{€}$.

Si determinino i prezzi fissati da tale azienda, che massimizza il profitto quando è possibile praticare la discriminazione del prezzo sui due mercati (cioè quando il prezzo praticato alle famiglie può essere differente rispetto quello praticato alle imprese).

Si calcoli la differenza tra il profitto dell'impresa discriminante rispetto al caso in cui, invece, la discriminazione di prezzo non fosse stata possibile.

Soluzione:

Dall'Esercizio precedente sono state determinate le equazioni delle funzioni inverse di domanda aggregata dell'impresa municipalizzata, date rispettivamente da

$$p = 1000 - 2Q^F \quad \text{e} \quad p = 4800 - \frac{24}{5}Q^I$$

le quali risultano essere lineari. L'eguaglianza tra ricavo marginale e costo marginale nei due sotto-mercati definisce le quantità da produrre e i rispettivi prezzi:

$$\begin{aligned} 1000 - 4Q^F &= 200 \Rightarrow Q^{F*} = 200 \Rightarrow p^F = 600 \\ 4800 - \frac{48}{5}Q^I &= 200 \Rightarrow Q^{I*} = \frac{2875}{6} \Rightarrow p^I = 2500 \end{aligned}$$

Il profitto complessivo dell'impresa discriminante è dato dalla somma dei profitti ottenuti nel segmento delle famiglie e in quello delle imprese, quindi risulta

$$\Pi = \Pi^F + \Pi^I = (600 - 200)200 + (2500 - 200)\frac{2875}{6} = 80000 + 1102083\text{€} = 1182083\text{€}.$$

Nel caso in cui l'azienda municipalizzata non possa discriminare nei due segmenti di mercato, deve fissare un unico prezzo. La funzione di domanda aggregata che affronta l'impresa monopolista è data dalla somma della domanda proveniente dalle famiglie e da quella proveniente dalle imprese, cioè

$$Q = \begin{cases} Q^F + Q^I & \text{se } p \leq 1000\text{€} \\ Q^I & \text{se } 1000\text{€} < p \leq 4800\text{€} \end{cases} \Rightarrow Q = \begin{cases} 500 - \frac{1}{2}p + 1000 - \frac{5}{24}p & \text{se } p \leq 1000\text{€} \\ 1000 - \frac{5}{24}p & \text{se } 1000\text{€} < p \leq 4800\text{€}, \end{cases}$$

quindi

$$Q = \begin{cases} 1500 - \frac{17}{24}p & \text{se } p \leq 1000\text{€} \\ 1000 - \frac{5}{24}p & \text{se } 1000\text{€} < p \leq 4800\text{€}. \end{cases}$$

Per $p < 1000\text{€}$ le funzione inversa di domanda e quella di ricavo marginale sono rispettivamente

$$p = \frac{36000}{17} - \frac{24}{17}Q \quad \text{R}' = \frac{36000}{17} - \frac{48}{17}Q.$$

Eguagliando il ricavo marginale al costo marginale, si ottiene

$$\frac{36000}{17} - \frac{48}{17}Q = 200 \Rightarrow 36000 - 48Q = 3400 \Rightarrow Q^* = \frac{4075}{6} \approx 679.17$$

che, sostituendo nella funzione di domanda, dà luogo a

$$p^* = \frac{36000}{17} - \frac{24}{17} \frac{4075}{6} = \frac{36000}{17} - \frac{16300}{17} = \frac{19700}{17} = 1158.82\text{€}.$$

Poiché $p^* > 1000\text{€}$, le famiglie non domandano metano, quindi la domanda proviene solo delle imprese, cioè l'azienda municipalizzata è impossibilitata a discriminare, vendendo il metano ad un prezzo così elevato che rende non conveniente l'acquisto di metano per le famiglie. Ma allora, per quale motivo il monopolista considera le famiglie? La strategia ottimale sarà di rivolgersi solo alle imprese, fissando un prezzo pari a quello ottimale nel mercato delle sole imprese. Questo prezzo è stato calcolato più in alto, ed è pari $p^I = 2500\text{€}$, cui corrisponde una quantità venduta pari a

$Q^{I*} = \frac{2875}{6} \approx 479.17$. I profitti saranno allora pari a quelli già calcolati nel solo segmento delle imprese, $\Pi = 1102083\text{€}$.

L'incremento di profitto che l'azienda municipalizzata ottiene se riesce a discriminare nei due segmenti di mercato è allora pari al profitto ottenuto dalle famiglie, cioè $\Pi^F = 80000\text{€}$.

Esercizio 10.15

Un monopolista è in grado di separare la sua domanda in due mercati: la funzione inversa di domanda nel primo è $p_1 = 36 - 3x_1$, mentre nel secondo è $p_2 = 20 - x_2$. Sapendo che i costi totali sono $CT = 24 + 12x$, dove x è la quantità complessivamente prodotta, si calcoli il profitto del monopolista nel caso in cui effettui la discriminazione di prezzo a mercati separati.

Soluzione:

Il monopolista discrimina su due mercati, eguagliando il ricavo marginale al costo marginale. Sul mercato 1 risulta

$$R'_1 = C' \Rightarrow 36 - 6x_1 = 12 \Rightarrow x_1^* = 4 \Rightarrow p_1^* = 24\text{€}.$$

Sul mercato 2 invece risulta

$$R'_2 = C' \Rightarrow 20 - 2x_2 = 12 \Rightarrow x_2^* = 4 \Rightarrow p_2^* = 16\text{€}.$$

Il profitto del monopolista è quindi dato da

$$\begin{aligned}\Pi &= RT_1 + RT_2 - CT \\ &= p_1^*x_1^* + p_2^*x_2^* - [24 + 12(x_1^* + x_2^*)] \\ &= 24 \cdot 4 + 16 \cdot 4 - 24 - 12(4 + 4) \\ &= 40\text{€}.\end{aligned}$$

Esercizio 10.16

Per il cenone di Capodanno il ristorante Vissani deve decidere il prezzo da applicare ai suoi clienti in due ristoranti collocati rispettivamente a Torino e a Palermo. Il costo marginale per pasto ammonta di 20€ per pasto. A Torino la quantità di pasti domandata è data da $Q = 120 - p$, mentre a Palermo da $Q = 120 - 0.75p$. Supponendo che non ci siano costi fissi, si calcoli il profitto massimo che Vissani può ottenere.

Soluzione:

Il ristorante Vissani può discriminare su due mercati, situati rispettivamente a Torino e a Palermo. A Torino, la funzione inversa di domanda di pasti è $p_T = 120 - Q_T$, quindi il ricavo marginale del ristorante è $R'_T = 120 - 2Q_T$. In equilibrio, risulta

$$R'_T = C' \Rightarrow 120 - 2Q = 20 \Rightarrow Q_T^* = 5 \Rightarrow p_T^* = 115\text{€}.$$

Soluzioni degli Esercizi

Poiché a Palermo la funzione inversa di domanda è $p_P = \frac{120 - Q}{0.75} = 160 - \frac{4}{3}Q_P$, la funzione di ricavo marginale è $R'_P = 160 - \frac{8}{3}Q_P$. In equilibrio risulta

$$R'_P = C' \Rightarrow 160 - \frac{8}{3}Q_P = 20 \Rightarrow Q_P^* = 52.5,$$

quindi

$$p_P^* = 160 - \frac{4}{3}Q_P^* = 160 - \frac{4}{3}52.5 = 90\text{€}.$$

Il profitto globale del ristorante è

$$\Pi = p_T^* Q_T^* + p_P^* Q_P^* - 20(Q_T^* + Q_P^*) = 115 \cdot 5 + 90 \cdot 52.5 - 20 \cdot 5 - 20 \cdot 52.5 = 4150\text{€}.$$

Esercizio 10.17

La funzione di domanda di ingresso in una certa discoteca per le donne è data da $N = 1000 - 50p$; senza pagare ($p = 0\text{€}$) entrerebbero 1000 donne, al prezzo $p = 20\text{€}$ non nessuna donna entrerebbe. Per gli uomini la funzione di domanda è $N = 2000 - 25p$.

Se il proprietario della discoteca potesse differenziare i prezzi tra uomini e donne, nell'ipotesi che i costi marginali siano nulli, quanto costerebbero i biglietti di entrata? A quanto ammonterà l'incasso totale? A terzi converrebbe prendere in gestione la discoteca se, per ogni volta aprono le porte, devono pagare un costo fisso pari a $CF = 38000\text{€}$?

Nel caso in cui la discriminazione non fosse stata possibile, quale valore di prezzo del biglietto sarebbe stato fissato? Sarebbe stato conveniente prendere in gestione la discoteca?

Soluzione:

La funzione di domanda di ingresso in discoteca per le donne è pari a $N_D = 1000 - 50p_D$, mentre per gli uomini è $N_U = 2000 - 25p_U$. Di conseguenza le funzioni inverse di domanda saranno rispettivamente

$$p_D = 20 - \frac{1}{50}N_D \quad \text{e} \quad p_U = 80 - \frac{1}{25}N_U,$$

quindi le funzioni di ricavo marginale saranno

$$R'_D = 20 - \frac{1}{25}N_D \quad \text{e} \quad R'_U = 80 - \frac{2}{25}N_U.$$

Poiché il costo marginale è nullo, eguagliando entrambi i ricavi marginali a zero, si ottiene

$$N_D^* = 500 \quad \text{e} \quad N_U = 1000$$

a cui, sostituendo nelle funzioni di domanda, corrispondono i seguenti prezzi di ingresso per donne e per gli uomini dati da

$$p_D^* = 10\text{€} \quad \text{e} \quad p_U = 40\text{€}.$$

Il ricavo totale derivante da questa politica di prezzi sarà allora

$$RT = 10 \cdot 500 + 40 \cdot 1000 = 45000\text{€}.$$

La discoteca costa $CF = 38000\text{€}$ a serata. Dato che, discriminando il prezzo tra uomini e donne, si ottengono incassi totali per 45000€ , il profitto sarà pari a $\Pi = 45000 - 38000 = 7000\text{€}$, quindi

conviene aprire la discoteca.

Se non fosse possibile discriminare tra uomini e donne (ad esempio, perché proibito dalla legge), la funzione di domanda dell'intero mercato ($N = N_D + N_U$) sarebbe data da

$$\begin{cases} N = 3000 - 75p & \text{se } p < 20\text{€} \\ N = 2000 - 25p & \text{se } p \geq 20\text{€, in quanto } N_D = 0. \end{cases}$$

Considerando la funzione di domanda della prima riga, risulta

$$p = 40 - \frac{1}{75}N \Rightarrow R' = 40 - \frac{2}{75}N.$$

Eguagliando il ricavo marginale a zero, si ottiene

$$R' = C' \Rightarrow 40 - \frac{2}{75}N = 0 \Rightarrow N^* = 1500 \text{ e } p^* = 20\text{€}.$$

Di conseguenza, se $N_D = 0$, entrerebbero in discoteca solo uomini ed il ricavo totale sarebbe pari a

$$RT = 20 \cdot 1500 = 30000\text{€}$$

che risulta minore del costo fisso derivante dall'apertura della discoteca ($CF = 38000\text{€}$), quindi la discoteca rimarrebbe chiusa.

Esercizio 10.18

La funzione inversa di domanda di lavoro di un'impresa monopsonista è data da $w = 20 - 2L$, mentre la funzione inversa di offerta di lavoro nell'intero mercato in cui l'impresa opera è data da $w = 2 + L$. Si calcoli il salario che sarà scelto dal monopsonista e si dica quale sarebbe il livello salariale ottimale per la collettività.

Soluzione:

Se la funzione di offerta di lavoro per l'impresa coincide con quella dell'intero mercato, allora la funzione di costo marginale del lavoro per l'imprenditore è data da

$$C'_L = 2 + 2L.$$

La quantità utilizzata di lavoro dall'impresa monopsonistica sarà data dall'uguaglianza tra la funzione di domanda di lavoro e la funzione di costo marginale del lavoro, quindi risulta

$$20 - 2L = 2 + 2L \Rightarrow L_M^* = 4.5,$$

dove il pedice M indica la presenza di potere monopsonistico. Il salario (calcolato sulla funzione di offerta) è pari a $w_M^* = 2 + 4.5 = 6.5\text{€}$.

Nel caso il mercato del lavoro fosse stato concorrenziale, il salario ottimale per la collettività sarebbe emerso dall'uguaglianza tra domanda e offerta di lavoro, cioè

$$20 - 2L = 2 + L \Rightarrow L^* = 6,$$

da cui il salario (calcolato sia sulla funzione di domanda che su quella di offerta) è pari a $w = 8\text{€}$. Quindi il potere dell'impresa monopsonistica porta ad un minore livello di occupazione ($L_M^* - L^* = 4.5 - 6 = -1.5$) e ad un minor livello di salario ($w_M^* - w^* = 6.5 - 8 = -1.5\text{€}$) rispetto alla situazione di mercato concorrenziale. Si noti che qualunque livello di salario "minimo" fissato dallo Stato compreso tra 6.5€ e 8€ porterebbe ad incrementi dell'occupazione.

Capitolo 11

Esercizio 11.1

Un'impresa che opera in concorrenza monopolistica sostiene un costo totale pari a $CT = 20q + q^2$. La funzione inversa di domanda è $p = 60 - q$. Sapendo che l'impresa ha fissato il prezzo $p = 48\text{€}$ per unità venduta, di quanto dovrebbe variare tale prezzo al fine di massimizzare il suo profitto?

Soluzione:

L'impresa massimizzerebbe il profitto eguagliando il ricavo marginale al costo marginale. In questo modo otterrebbe

$$R' = C' \Rightarrow \frac{\partial RT}{\partial q} = \frac{\partial CT}{\partial q} \Rightarrow 60 - 2q = 20 + 2q \Rightarrow q^* = 10$$

a cui, sostituendo nella funzione inversa di domanda, corrisponde $p^* = 50\text{€}$.

Dato che l'impresa ha fissato il prezzo a $p = 48\text{€}$, tale prezzo dovrebbe variare di $\Delta p = 50 - 48 = 2\text{€}$.

Esercizio 11.2

In un mercato di concorrenza monopolistica la funzione inversa di domanda di un'impresa ha equazione $p = 8 - 0.5q$, mentre la funzione di costo totale è $CT = 10 + 2q$. Sostenendo un costo fisso pari a $CF = 5\text{€}$ per lanciare una campagna pubblicitaria, l'impresa può modificare la domanda in modo che la sua equazione diventi $p = 10 - 0.5q$. Di quanto varia il profitto dell'impresa a seguito della campagna pubblicitaria (si indichi il segno)?

Soluzione:

Poiché il costo marginale dell'impresa è $C' = \frac{\partial CT}{\partial q} = 2\text{€}$, l'impresa massimizza il profitto quando risulta $R' = C'$. Nello scenario iniziale (1), risulta

$$R'_1 = C' \Rightarrow 8 - q = 2 \Rightarrow q_1 = 6 \text{ e } p_1 = 5\text{€},$$

mentre nello scenario successivo (2), risulta

$$R'_2 = C' \Rightarrow 10 - q = 2 \Rightarrow q_2 = 8 \text{ e } p_2 = 4\text{€}.$$

La variazione di profitto a seguito della campagna pubblicitaria ammonta quindi a

$$\begin{aligned} \Delta \Pi &= \Pi_2 - \Pi_1 \\ &= p_1 q_1 - CT_1 - (p_2 q_2 - CT_2) \\ &= 5 \cdot 6 - 10 - 2 \cdot 6 - 4 \cdot 8 + 10 + 2 \cdot 8 \\ &= 30 - 12 - 32 + 16 = 2\text{€}. \end{aligned}$$

Attraverso la campagna pubblicitaria, l'impresa riesce ad accrescere il suo profitto di 2€.

Esercizio 11.3

La funzione inversa di domanda per un'impresa in concorrenza monopolistica è $p = 198 - q$, mentre la sua funzione di costi medio ha equazione $CM = \frac{100}{q} + 2$.
A quale prezzo venderà il proprio prodotto nel breve periodo?

Soluzione:

Nel breve periodo l'impresa in concorrenza monopolistica si comporta esattamente come un'impresa in monopolio, quindi eguaglia il suo ricavo marginale al suo costo marginale. Dato che

$$CT = CMq = 100 + 2q \Rightarrow C' = 2\text{€},$$

allora risulta

$$R' = C' \Rightarrow 198 - 2q = 2 \Rightarrow q^* = 98.$$

Sostituendo all'interno della funzione inversa di domanda, si ottiene il prezzo di vendita

$$p^* = 198 - q^* = 198 - 98 = 100\text{€}.$$

Esercizio 11.4

Un mercato in concorrenza monopolistica, con curva di mercato data da $Q = 480 - 24p$, è caratterizzato dalla presenza di 12 imprese identiche, quindi risulta $Q = 12q$, che operano con la funzione di costo totale $CT = 10 + 2q^2$. Si calcoli il profitto di breve periodo (Π) di ciascuna delle imprese esistenti.

Soluzione:

Se la funzione di domanda aggregata è $Q = 480 - 24p$, la funzione di domanda di ciascuna impresa è

$$q = \frac{Q}{12} = 40 - 2p$$

dalla quale si ottiene l'equazione inversa $p = 20 - 0.5q$. La condizione di equilibrio per la singola impresa è

$$R' = C' \Rightarrow \frac{\partial RT}{\partial q} - \frac{\partial CT}{\partial q} \Rightarrow 20 - q = 4q \Rightarrow q^* = 5$$

a cui corrisponde il prezzo $p^* = 17.50\text{€}$. Il profitto di ogni impresa è quindi

$$\Pi = RT - CT = p^*q^* - 10 - 2q^{*2} = 17.5 \cdot 5 - 10 - 2 \cdot 5^2 = 27.50\text{€}.$$

Esercizio 11.5

In qualità di direttore di un call center, sapete che il numero delle postazioni lavorative K deve eguagliare il numero dei lavoratori L , poiché la funzione di produzione dell'impresa è data da $q = \min\{K, L\}$ (perfetta complementarità tra fattori produttivi). I costi orari del lavoro e del capitale sono $w = 32\text{€}$ e $r = 8\text{€}$. L'impresa opera in concorrenza monopolistica in un mercato dove, nel breve periodo, la funzione aggregata di domanda è $Q = 880 - 10p$. Sapendo che nello stesso mercato operano in tutto 5 imprese identiche, si calcoli il numero ottimale di postazioni lavorative dell'impresa.

Soluzione:

Dato che $Q = 5q$ allora risulta

$$5q = 880 - 10p \Rightarrow p = 88 - \frac{1}{2}q \Rightarrow R' = 88 - q.$$

Inoltre deve risultare $K = L$, quindi

$$q = L = K.$$

I costi totali sono

$$CT = wL + rK = (w + r)q \Rightarrow C' = w + r = 32 + 8 = 40\text{€}.$$

Dalla condizione di equilibrio dell'impresa si ottiene

$$R' = C' \Rightarrow 88 - q = 40 \Rightarrow q = 88 - 40 \Rightarrow K = 48.$$

Esercizio 11.6

Un'impresa che opera in un mercato di concorrenza monopolistica presenta costi totali $CT = 26 + 2q^2$, mentre la funzione di domanda è data da $p = 52 - 24q$. Si determini la quantità prodotta dall'impresa nel lungo periodo.

Soluzione:

Poiché nel lungo periodo l'impresa il proprio ricavo medio al costo medio, risulta

$$p = CM \Rightarrow 52 - 24q = \frac{26}{q} + 2q \Rightarrow 26q^2 - 52q + 26 = 0;$$

dividendo per 26, si ottiene la quantità prodotta ottimale

$$q^2 - 2q + 1 = 0 \Rightarrow (q - 1)^2 = 0 \Rightarrow q^* = 1.$$

Esercizio 11.7

Un mercato in concorrenza monopolistica, dove la funzione di domanda aggregata è $Q = 2400 - 48p$ è caratterizzato dalla presenza di $n = 24$ imprese identiche (quindi vale $Q = 24q$) che operano con funzione di costo totale $CT = 10 + 2q^2$.
Si supponga che una nuova impresa, identica alle precedenti, entri sul mercato. Di quanto si riduce l'extraprofitto di ciascuna delle imprese esistenti?

Soluzione:

Se l'equazione della domanda aggregata è $Q = 2400 - 48p$, la funzione di domanda di ciascuna impresa sul mercato è

$$q = \frac{Q}{24} = 100 - 2p,$$

quindi l'equazione inversa è $p = 50 - 0.5q$. Poiché $C' = \frac{\partial CT}{\partial q} = 4q$, ciascuna impresa produce la quantità

$$R' = C' \Rightarrow 50 - q = 4q \Rightarrow q_0 = 10$$

a cui, dalla funzione inversa di domanda, corrisponde il prezzo $p_0 = 45\text{€}$.

Se entra un'impresa sul mercato, la domanda di ciascuna impresa diventa

$$q = \frac{Q}{25} = 96 - \frac{48}{25}p,$$

quindi l'equazione inversa è $p = 50 - \frac{25}{48}q$. In questo caso ciascuna impresa produce la quantità

$$R' = C' \Rightarrow 50 - \frac{25}{48}q = 4q \Rightarrow q_1 = \frac{24}{121}50 = \frac{1200}{121} \approx 9.9174$$

a cui, dalla funzione inversa di domanda, corrisponde il prezzo

$$p_1 = 50 - \frac{25}{48} \frac{1200}{121} = 50 - \frac{625}{121} \approx 44.83\text{€}.$$

La riduzione di profitto per ciascuna impresa è quindi

$$\begin{aligned} \Delta \Pi &= \Pi_1 - \Pi_0 \\ &= RT_1 - CT_1 - (RT_0 - CT_0) \\ &= p_1 q_1 - 10 - 2q_1^2 - (p_0 q_0 - 10 - 2q_0^2) \\ &= \left[\left(50 - \frac{625}{121} \right) \frac{1200}{121} - 2 \cdot \frac{1200^2}{121^2} \right] - (10 \cdot 45 - 2 \cdot 10^2) \\ &= \frac{1200}{121} \left(\frac{50 \cdot 121 - 625 - 2400}{121} \right) - (4500 - 200) \\ &= 275 \frac{1200}{121} - 4300 \\ &= 1200 \frac{25}{11} - 4300 \\ &= 100 \frac{300 - 43 \cdot 11}{11} \\ &= -\frac{17300}{11} \approx -1572.73\text{€}. \end{aligned}$$

Esercizio 11.8

La funzione inversa di domanda che si rivolge ad un'impresa che opera in concorrenza monopolistica è data da $p = 90 - \frac{n}{10}q$, dove n è il numero di imprese operanti nel mercato. La funzione di costo totale di questa impresa è data da $CT = 4q^3 - 20q^2 + 99q$. Si calcoli il numero di imprese che opereranno nel mercato nel lungo periodo.

Soluzione:

Affinché nel lungo periodo si possa determinare il numero di imprese che operano in un mercato di concorrenza monopolistica occorre trovare il punto di tangenza tra la funzione inversa di domanda (ricavo medio) e quella di costo medio. Analiticamente risulta quindi

$$p = CM \Rightarrow 90 - \frac{n}{10}q = 4q^2 - 20q + 99 \Rightarrow 4q^2 - \left(20 - \frac{n}{10}\right)q + 9 = 0.$$

Risolvendo, si ottiene

$$q^* = \frac{\left(20 - \frac{n}{10}\right) \pm \sqrt{\left(20 - \frac{n}{10}\right)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{8} = \frac{1}{8} \left(20 - \frac{n}{10}\right) \pm \frac{1}{8} \sqrt{\left(20 - \frac{n}{10}\right)^2 - 144}.$$

La condizione di tangenza tra le due curve richiede che il discriminante (Δ) sia nullo, quindi deve valere

$$\Delta = 0 \Rightarrow \left(20 - \frac{n}{10}\right)^2 - 144 = 0 \Rightarrow 20 - \frac{n}{10} = \pm 12 \Rightarrow n = 10(20 \pm 12),$$

quindi $n^* = 80$, perché l'altra soluzione $n = 320$ deve essere scartata, in quanto darebbe luogo a $q^* < 0$. Sul mercato operano quindi 80 imprese.

Esercizio 11.9

In un mercato di concorrenza monopolistica inizialmente operano $n = 25$ imprese identiche con funzione di costo totale $CT = q^3 - 16q^2 + 109q$; si determini il numero di imprese che entrano nel lungo periodo, sapendo che la funzione di domanda per ogni impresa è $q^d = \frac{3}{n}(100 - p)$.

Soluzione:

Nel lungo periodo il numero delle imprese è determinato dalla condizione di tangenza tra la funzione inversa di domanda, la quale ha equazione $p = 100 - \frac{n}{3}q$, e la curva dei costi medi di equazione

$CM = \frac{CT}{q} = q^2 - 16q + 109$. Eguagliando le due equazioni, risulta

$$100 - \frac{n}{3}q = q^2 - 16q + 109$$

$$q^2 - \left(16 - \frac{n}{3}\right)q + 9 = 0$$

$$q = \frac{1}{2} \left(16 - \frac{n}{3}\right) \pm \frac{\Delta}{2},$$

dove Δ è il discriminante e risulta $q > 0$ se $n < 16 \cdot 3 = 48$. La condizione di tangenza è

$$\Delta = 0 \Rightarrow \left(16 - \frac{n}{3}\right)^2 - 4 \cdot 9 = 0 \Rightarrow 16 - \frac{n}{3} = \pm 6 \Rightarrow n = 3(16 \pm 6),$$

quindi $n^* = 30$, in quanto l'altra soluzione $n = 66$ deve essere scartata perché la quantità prodotta sarebbe negativa ($q^* < 0$). Il numero di imprese che entrano nel lungo periodo è quindi

$$\Delta n = 30 - 25 = 5.$$

● ————— **Esercizio 11.10** ————— ●

In un mercato di concorrenza monopolistica inizialmente operano $n_0 = 21$ imprese identiche con funzione di costo totale $CT = 4q + 575$; si determini il numero di imprese che entrano nel lungo periodo, sapendo che la funzione di domanda per ogni impresa è $q^d = \frac{234 - p}{n - 1}$.

Soluzione:

La funzione inversa di domanda è $p = 234 - (n - 1)q$, mentre la funzione di costo medio è $CM = \frac{CT}{q} = 4 + \frac{575}{q}$. Nel lungo periodo occorre che sia verificata l'uguaglianza

$$p = CM \Rightarrow 234 - (n - 1)q = 4 + \frac{575}{q} \Rightarrow 234q - (n - 1)q^2 = 4q + 575$$

da cui si ottiene

$$(n - 1)q^2 - 230q + 575 = 0.$$

La condizione di tangenza tra ricavo medio (funzione inversa di domanda) e costo medio impone che il discriminante sia nullo, quindi si ha

$$\Delta = 0 \Rightarrow 230^2 - 4 \cdot 575(n - 1) = 0 \Rightarrow n^* = 1 + \frac{230^2}{4 \cdot 575} = 1 + 23 = 24.$$

Il numero delle imprese che entrano sul mercato è dato perciò dalla differenza

$$\Delta n = n^* - n_0 = 24 - 21 = 3.$$

Sum mercato entrano 3 imprese.

Capitolo 12

Esercizio 12.1

In un mercato di oligopolio con funzione di domanda $p = 100 - Q$ operano due imprese con identica funzione di costo totale $CT = 42q$. Applicando il modello di Bertrand, si determini la quantità prodotta da ogni singola impresa (q^*).

Soluzione:

Poiché il modello di Bertrand si caratterizza per il fatto che entrambe le imprese impongono un prezzo di vendita pari al loro costo marginale, risulta

$$p = C' = \frac{\partial CT}{\partial q} = 42\text{€}.$$

Dall'equazione della funzione inversa di domanda aggregata, si ottiene quindi la quantità scambiata sul mercato che ammonta a

$$Q^* = 100 - p^* = 100 - 42 = 58.$$

La quantità prodotta da ogni singola impresa è quindi $q^* = \frac{Q^*}{2} = \frac{58}{2} = 29$.

Esercizio 12.2

Due imprese, entrambe con funzione di costo totale $CT = q^2 + 16$, operano in un mercato comportandosi secondo il modello di Bertrand. Quale sarà il prezzo di equilibrio sul mercato?

Soluzione:

Il costo marginale delle due imprese è crescente, mentre la funzione di costo medio presenta un minimo. Il modello di Bertrand prevede che la guerra sui prezzi tra le due imprese porti le imprese a fissare prezzi pari a tale minimo di costo medio. Poiché l'equazione del costo medio è data da

$$CM = \frac{CT}{q} = q + \frac{16}{q},$$

applicando la condizione del primo ordine si ottiene il livello di output al quale corrisponde il costo medio minimo, cioè

$$\frac{\partial CM}{\partial q} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{16}{q^2} = 0 \Rightarrow q_{\min} = 4.$$

Per questo livello di produzione il costo medio minimo ammonta a $CM = 8\text{€}$. Ciascuna impresa produce quindi $q_{\min} = 4$ e il prezzo di mercato è pari a $p^* = 8\text{€}$.

Esercizio 12.3

In un duopolio à la Cournot la funzione inversa di domanda di mercato è $p = 100 - 2Q$, dove Q è la produzione totale che viene ripartita tra le due imprese che producono rispettivamente q_1 e q_2 (quindi $Q = q_1 + q_2$). La funzione di costo totale, identica per le due imprese, è $CT_i = 25q_i$ per $i = 1, 2$. Si determinino:

1. la quantità prodotta da ognuna delle due imprese;
2. il prezzo di mercato;
3. il profitto di ognuna delle due imprese;
4. il maggior profitto che ognuna delle due imprese otterrebbe se i due imprenditori riuscissero a colludere.

Soluzione:

Secondo le ipotesi di Cournot, l'imprenditore dell'impresa 1 considera la quantità prodotta dall'impresa 2 come esogena. La funzione di domanda di mercato per l'impresa 1 è allora data da

$$p = 100 - 2(q_1 + \bar{q}_2) \Rightarrow p = 100 - 2\bar{q}_2 - 2q_1,$$

quindi il ricavo marginale dell'impresa 1 è dato da

$$R'_1 = 100 - 2\bar{q}_2 - 4q_1.$$

Il costo marginale dell'impresa è pari a $C'_1 = 25\text{€}$, quindi risulta

$$R'_1 = C'_1 \Rightarrow \bar{q}_2 - 4q_1 = 25$$

da cui deriva

$$q_1 = \frac{75}{4} - \frac{1}{2}\bar{q}_2$$

che rappresenta la funzione di reazione dell'impresa 1 la quale esprime quanto è ottimale produrre per l'impresa 1 per ogni dato livello di produzione dell'impresa 2.

La funzione di domanda per l'impresa 2 (che considera esogenamente data la quantità prodotta dall'impresa 1), è quindi data da

$$p = 100 - 2(q_2 + \bar{q}_1) \Rightarrow p = 100 - 2\bar{q}_1 - 2q_2,$$

quindi il ricavo marginale dell'impresa 2 ha equazione

$$R'_2 = 100 - 2\bar{q}_1 - 4q_2,$$

mentre il costo marginale dell'impresa 2 è pari a $C'_2 = 25\text{€}$. Massimizzando il profitto, l'impresa 2 ottiene

$$R'_2 = C'_2 \Rightarrow 100 - 2\bar{q}_1 - 4q_2 = 25 \Rightarrow q_2 = \frac{75}{4} - \frac{1}{2}\bar{q}_1$$

che rappresenta la funzione di reazione dell'impresa 2. Poiché le due imprese hanno gli stessi costi marginali, si nota che le curve di reazione delle due imprese hanno la stessa equazione.

L'equilibrio nel mercato si raggiunge quando $q_1 = \bar{q}_1$ e $q_2 = \bar{q}_2$, cioè quando le aspettative di un'impresa sulla quantità prodotta da parte dell'altra coincidono con la produzione ottimale dell'altra. Il sistema tra le funzioni di reazione delle due imprese dà luogo al seguente sistema

$$\begin{cases} q_1 = \frac{75}{4} - \frac{1}{2}q_2 \\ q_2 = \frac{75}{4} - \frac{1}{2}q_1 \end{cases}$$

1. Sostituendo la seconda equazione nella prima, si ottiene:

$$q_1 = \frac{75}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{75}{4} - \frac{1}{2} q_1 \right) \Rightarrow \frac{3}{4} q_1 = \frac{75}{8} \Rightarrow q_1^* = \frac{25}{2} = 12.5.$$

Sostituendo questo risultato nella seconda equazione del sistema, si ottiene otteniamo $q_2^* = \frac{25}{2} = 12.5$, quindi le imprese producono la stessa quantità.

2. Data la curva di domanda, il prezzo di vendita del bene è

$$p^* = 100 - 2 \left(\frac{25}{2} + \frac{25}{2} \right) = 50\text{€}.$$

3. Il profitto di ognuna delle due imprese sarà allora:

$$\Pi_i = p q_i - CT(q_i) = 50 \frac{25}{2} - 25 \frac{25}{2} = 312.50\text{€}$$

per $i = 1, 2$.

4. Se i due imprenditori colludessero, allora si comporterebbero come un unico monopolista e sceglierebbero la quantità che rende uguale il ricavo marginale relativo all'intero mercato e il costo marginale. Il ricavo marginale è dato da $R' = 100 - 4Q$, mentre il costo marginale è $C' = 25\text{€}$ per ambedue le imprese, quindi risulta

$$R' = C' \Rightarrow 100 - 4Q = 25 \Rightarrow Q^* = \frac{75}{4},$$

a cui corrisponde il prezzo $p^* = 100 - 2 \frac{75}{4} = \frac{125}{2} = 62.50\text{€}$. Assumendo che le due imprese si dividano a metà l'intera produzione, risulta

$$q_1 = q_2 = \frac{Q}{2} = \frac{75}{8} = 37.50.$$

In questo caso il profitto di ognuna delle due imprese sarebbe

$$\Pi_i = \frac{125}{2} \frac{75}{8} - 25 \frac{75}{8} = \frac{5625}{16} = 351.50\text{€}$$

per $i = 1, 2$. L'incremento di profitto ottenuto grazie alla collusione sarebbe pari a: $351.50 - 312.50 = 39\text{€}$ per ognuna delle due imprese.

•

Esercizio 12.4

•

La funzione domanda di mercato di un bene è $Q = 110 - p$. Si consideri un duopolio di Cournot dove le due imprese A e B hanno funzione di costo totale di equazione $CT_i = 20q_i$, con $i = 1, 2$. Sapendo che $Q = q_1 + q_2$, si determinino la quantità ed il prezzo di equilibrio di mercato.

Soluzione:

Il testo dell'esercizio presenta una funzione di domanda lineare e funzioni di costo marginale costante uguali per le due imprese. Pertanto, si possono calcolare prezzo e quantità prodotte da ognuna delle due imprese in equilibrio semplicemente utilizzando i risultati delle equazioni (12.4) e (12.5), dove a rappresenta l'intercetta della funzione inversa di domanda, b il valore assoluto della pendenza della funzione di domanda, c il costo marginale costante. Dal testo emergono quindi

$$\begin{cases} a = 110 \\ b = 1 \\ c = 20\text{€}. \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione (12.4) si ottiene

$$q_i = \frac{a - c}{3b} \Rightarrow q_i = \frac{110 - 20}{3} = 30$$

per $i = 1, 2$. Sostituendo nell'equazione (12.5) risulta

$$p = \frac{a + 2c}{3} = \frac{110 + 40}{3} = 50\text{€}.$$

Esercizio 12.5

Il benessere (B) della città di Falconara dipende dal livello dei propri scarichi industriali in mare (S_F) e dagli scarichi della vicina città di Ancona (S_A), secondo la funzione

$$B(S_F, S_A) = 4S_A^{-1}S_F - S_F^2.$$

Supponendo che il comune di Falconara abbia il potere di determinare S_F autorizzando gli scarichi in mare, che esso assuma come dato il volume degli scarichi di Ancona e che desideri massimizzare il benessere della propria cittadina, si determini l'equazione della curva di reazione del comune di Falconara, cioè la funzione che indichi il valore ottimale degli scarichi, per ciascun valore degli scarichi di Ancona.

Soluzione:

Il testo dell'esercizio propone una situazione in cui due Comuni limitrofi devono decidere il livello degli scarichi industriali, nell'ipotesi che il benessere dei cittadini dipenda negativamente sia dagli scarichi del comune in cui abita che dagli scarichi dell'altro comune, ma dipenda positivamente dagli scarichi del comune in cui si abita (più si scarica, più si produce...). Gli amministratori di ognuno dei due comuni vorrebbero che l'altro comune effettuasse la minore quantità di scarichi possibile. Se il comune di Falconara assumesse come data la quantità di scarichi del comune di Ancona, si trova di fronte alla funzione di benessere sociale data dall'equazione

$$B(S_F, S_A) = 4 \frac{S_F}{S_A} - S_F^2$$

dove $\bar{S}_A$ indica che il comune di Falconara assume come esogeni gli scarichi della città di Ancona. La massimizzazione del benessere si ottiene attraverso la condizione del primo ordine

$$\frac{\partial B(S_F, S_A)}{\partial S_F} = 0 \Rightarrow \frac{4}{S_A} - 2S_F = 0$$

pertanto, la scelta ottimale di S_F è data da

$$S_F^* = \frac{2}{S_A}$$

che rappresenta la funzione di reazione del comune di Falconara. Il risultato mostra che tanto più gli scarichi prodotti dalla città di Ancona sono alti tanto più, per Falconara, sarà opportuno ridurre i propri scarichi, quindi la propria attività produttiva.

• ————— **Esercizio 12.6** ————— •

In un duopolio di Cournot, la funzione inversa di domanda ha equazione $p = 170 - 2Q$. Le due imprese sono identiche e massimizzano il profitto producendo 20 unità di output ciascuna ($q_1 = q_2 = 20$). Si determinino i loro costi marginali.

Soluzione:

Poiché la funzione inversa di domanda di mercato è lineare, mentre il costo marginale è costante ed uguale per entrambe le imprese, allora la quantità prodotta da ciascuna impresa nel duopolio di Cournot è data da

$$q_i = \frac{170 - C'_i}{3 \cdot 2} = 20 \Rightarrow C'_i = 170 - 20 \cdot 6 = 50\text{€},$$

dove $i = 1, 2$, mentre i valori 170 e 2 sono rispettivamente quelli dell'intercetta e del coefficiente angolare della funzione aggregata inversa di domanda.

• ————— **Esercizio 12.7** ————— •

Due imprese operano in oligopolio secondo il modello di Cournot. La funzione di domanda dell'intero mercato è data da $Q = 200 - p$; i costi marginali, costanti e uguali per le due imprese, sono pari a $C' = 10\text{€}$. Si definisca la funzione di reazione dell'impresa 1.

Soluzione:

Invertendo la funzione di domanda aggregata, si ottiene

$$p = 200 - Q = 200 - q_1 - q_2,$$

quindi la funzione di ricavo totale dell'impresa 1 è

$$RT_1 = pq_1 = (200 - q_1 - q_2)q_1 = 200q_1 - q_1^2 - q_1q_2,$$

mentre quella di ricavo marginale è

$$\frac{\partial RT_1}{\partial q_1} = 200 - 2q_1 - q_2.$$

Eguagliando quest'ultima funzione al costo marginale sostenuto dall'impresa 1 (massimizzazione del profitto), risulta

$$R'_1 = C' \Rightarrow 200 - 2q_1 - q_2 = 10 \Rightarrow q_1 = 100 - \frac{q_2}{2}$$

la quale costituisce la funzione di reazione dell'impresa 1.

• ————— Esercizio 12.8 ————— •

In un oligopolio operano due imprese. La funzione inversa di domanda di mercato è $p = 160 - 2Q$ e l'impresa leader ha già fissato la propria quantità in $q_1 = 44$. L'altra impresa, follower, conosce l'ammontare di produzione dell'impresa leader. Sapendo la sua curva di costo totale è $CT = 10 + 16q_2$, quanto produce l'impresa follower se vuole massimizzare il profitto?

Soluzione:

Se l'impresa leader ha fissato in $q_1 = 44$ la quantità di output da produrre, l'impresa follower può produrre sfruttando la domanda residuale la cui equazione inversa è data da

$$p = 160 - 2(q_1 + q_2) = 160 - 2 \cdot 44 - 2q_2 = 72 - 2q_2.$$

In corrispondenza di questa funzione, l'impresa follower massimizza il suo profitto, quindi risulta

$$R'_2 = C'_2 \Rightarrow \frac{\partial RT_2}{\partial q_2} = \frac{\partial CT}{\partial q_2} \Rightarrow 72 - 4q_2 = 16 \Rightarrow q_2^* = 14.$$

L'impresa follower produce quindi la quantità $q_2^* = 14$.

• ————— Esercizio 12.9 ————— •

L'impresa 1, operante in un duopolio, assume che l'impresa concorrente (impresa 2) produca $q_2 = 610$. Assumendo che la funzione di domanda di mercato sia data da $Q = 2000 - p$ e che il costo marginale (costante) dell'impresa 1 sia $C' = 4\text{€}$, si calcoli il prezzo che verrà fissato sul mercato.

Soluzione:

Se l'impresa 1 assume che l'impresa 2 ha fissato in $q_2 = 610$ la quantità di output da produrre, può produrre sfruttando la domanda residuale la cui equazione inversa è data da

$$p = 2000 - (q_1 + q_2) = 2000 - 2q_1 - 610 = 1390 - q_1.$$

In corrispondenza di questa funzione, l'impresa 1 massimizza il suo profitto, quindi risulta

$$R'_1 = C'_1 \Rightarrow \frac{\partial RT_1}{\partial q_1} = \frac{\partial CT}{\partial q_1} \Rightarrow 1390 - 2q_1 = 4 \Rightarrow q_1^* = \frac{1390 - 4}{2} = 693.$$

Dato che l'impresa 1 produce la quantità $q_1^* = 693$, se l'impresa 2 produce $q_2 = 610$ il prezzo di mercato sarà

$$p^* = 2000 - (693 + 610) = 697\text{€}.$$

Esercizio 12.10

Due imprese con prodotto omogeneo operano entrambe con costi marginali costanti pari a 10€ e competono, secondo il modello di Bertrand, per una domanda di mercato data dalla funzione inversa $p = 42 - 1.5Q$. Di quanto aumenterebbe il prezzo di equilibrio se le imprese potessero colludere?

Soluzione:

Se le imprese competono à la Bertrand il prezzo che impongono è uguale al costo marginale che sopportano, quindi risulta $p_B = C' = 10€$.

Se invece le imprese potessero colludere, si applicherebbe la condizione di massimizzazione del profitto propria di un monopolista, quindi risulterebbe

$$R' = C' \Rightarrow 42 - 3Q = 10 \Rightarrow Q^* = \frac{32}{3} \approx 10.67$$

a cui corrisponderebbe un prezzo pari a $p_C = 42 - 1.5 \frac{32}{3} = 26€$. Se le imprese potessero colludere l'aumento di prezzo ammonterebbe a $p_C - p_B = 26 - 10 = 16€$.

Esercizio 12.11

In un duopolio la funzione di costo totale, identica per le due imprese, sia $CT_i = 10 + 11q_i$, dove q_i è la quantità prodotta dalla singola impresa, con $i = 1, 2$. La domanda di mercato è data da $p = 200 - 3Q$, dove $Q = q_1 + q_2$. Supponete che le imprese competano secondo il modello di Bertrand (B). Qual è l'incremento di prezzo che si verifica se invece le imprese si comportano secondo il modello di Cournot (C)?

Soluzione:

Se le imprese operano secondo il modello di Bertrand, il prezzo di vendita del prodotto eguaglia il valore minimo del costo medio che in questo caso coincide con il costo marginale, quindi risulta $p_B^* = C' = 11€$.

Se invece si comportano secondo il modello di Cournot, ogni impresa produce $q_i^* = \frac{200 - C'}{3 \cdot 3} = \frac{200 - 11}{9} = 21$, quindi risultano

$$Q^* = 2q_i^* = 42 \quad \text{e} \quad p_C^* = 200 - 3Q^* = 200 - 126 = 74€.$$

L'incremento di prezzo è dato da

$$p_C^* - p_B^* = 74 - 11 = 63€.$$

Esercizio 12.12

In un duopolio secondo il modello di Cournot, le due imprese presentano costi marginali costanti pari a $C' = 10\text{€}$, mentre la domanda aggregata è data da $p = 12 - Q/3$. Quale sarebbe la variazione nelle quantità prodotte (ΔQ) complessivamente dalle due imprese nel caso decidessero di fare cartello, cioè di colludere (si indichi il segno)?

Soluzione:

In caso di comportamento alla Cournot, l'impresa 1 eguaglia il costo marginale al ricavo marginale, quindi si ottiene

$$R'_1 = C'_1 \Rightarrow 12 - \frac{q_2}{3} - \frac{2}{3}q_1 = 10,$$

quindi la sua curva di reazione è

$$q_1 = \frac{3}{2} \left(2 - \frac{q_2}{3} \right) = 3 - \frac{q_2}{2}.$$

L'impresa 2 si comporta in modo simmetrico quindi, mettendo a sistema, risulta

$$\begin{cases} q_1 = 3 - \frac{q_2}{2} \\ q_2 = 3 - \frac{q_1}{2} \end{cases} \Rightarrow q_1^* = q_2^* = 2.$$

La quantità complessivamente prodotta con Cournot è quindi $Q_C = q_1^* + q_2^* = 4$.

In caso di collusione, le due imprese si comportano come se fossero un monopolista, quindi risulta

$$R' = C' \Rightarrow 12 - \frac{2}{3}Q = 10 \Rightarrow Q_M = 3.$$

La variazione è data dalla quantità complessivamente prodotta in collusione e quella prodotta secondo Cournot, quindi risulta

$$\Delta Q = Q_M - Q_C = 3 - 4 = -1.$$

Esercizio 12.13

Due imprese devono decidere se colludere o meno. Si completi la seguente Matrice dei payoff, con un numero intero in modo che, in un gioco *one-shot*, la combinazione "collude-collude" costituisca l'equilibrio di Nash che non sia Pareto-efficiente.

impresa 1 \ impresa 2	collude	non collude
collude	$\pi_1 = \pi_2 = 24$	$\pi_1 = 26, \pi_2 = 23$
non collude	$\pi_1 = 23, \pi_2 = 26$	$\pi_1 = \pi_2 = \underline{\hspace{2cm}}$

Soluzione:

Soluzioni degli Esercizi

Dalla matrice dei payoff del testo emerge che, se un'impresa collude, anche l'altra impresa collude. L'equilibrio di Nash "collude-collude" (C-C) è unico se, a fronte della strategia "non collude" (NC) dell'impresa 1, per l'impresa 2 è ottimale colludere, cioè deve risultare

$$\pi_2^{\text{NC,NC}} < 26\text{€};$$

analogamente, se a fronte della strategia "non collude" dell'impresa 2, per l'impresa 1 è ottimale colludere, quindi deve risultare anche

$$\pi_1^{\text{NC,NC}} < 26\text{€}.$$

La collusione per entrambi i giocatori non è un equilibrio Pareto-efficiente se i payoff nel C-C siano inferiori ai payoff associati alla situazione NC-NC, quindi deve valere

$$\pi_i^{\text{C,C}} = 24 < \pi_i^{\text{NC,NC}}$$

per $i = 1, 2$. L'unica soluzione che rispetta quest'ultima condizione è

$$\pi_i^{\text{NC,NC}} = 25\text{€}.$$

In questo scenario, sinteticamente si ottiene la seguente rappresentazione del gioco:

		impresa 2	
		collude	non collude
impresa 1	collude	$\pi_1 = 24$ $\pi_2 = 24$	$\pi_1 = 26$ $\pi_2 = 23$
	non collude	$\pi_1 = 23$ $\pi_2 = 26$	$\pi_1 = 25$ $\pi_2 = 25$

Esercizio 12.14

In un duopolio le imprese A e B possono giocare due strategie: colludere (C) con il concorrente o non colludere ($\bar{C}$). Le due imprese conoscono la matrice dei payoff che è riportata di seguito. Si determinino i valori di α e β per cui il gioco è un Dilemma del Prigioniero.

impresa A \ impresa B	impresa B	
	C	$\bar{C}$
C	$\pi_A = 3, \pi_B = 3$	$\pi_A = 1, \pi_B = 10$
$\bar{C}$	$\pi_A = 10, \pi_B = 1$	$\pi_A = \alpha, \pi_B = \beta$

Soluzione:

Affinché il gioco proposto sia un dilemma del prigioniero occorre che l'equilibrio di Nash corrisponda alla soluzione " $\bar{C} - \bar{C}$ " e che la combinazione Pareto-efficiente sia " $C - C$ ". Osservando i payoff nella tabella, si evince che l'equilibrio di Nash è ottenibile solo se valgono entrambe le condizioni

$$\alpha > 1 \quad \text{e} \quad \beta > 1.$$

Note queste condizioni, occorre che i payoff relativi all'equilibrio di Nash siano inferiori a quelli della situazione Pareto-efficiente, quindi devono valere anche le condizioni

$$\alpha < 3 \quad \text{e} \quad \beta < 3.$$

Mettendo insieme le due condizioni, si ottiene quindi

$$1 < \alpha < 3 \quad \text{e} \quad 1 < \beta < 3.$$

Ad esempio, se $\alpha = \beta = 2$, si ottiene la seguente matrice dei payoff che configura un Dilemma del Prigioniero.

		impresa B	
		C	$\bar{C}$
impresa A	C	$\pi_A = 3$ $\pi_B = 3$	$\pi_A = 1$ $\pi_B = 10$
	$\bar{C}$	$\pi_A = 10$ $\pi_B = 1$	$\pi_A = \alpha = 2$ $\pi_B = \beta = 2$

Esercizio 12.15

Sia la Sony, sia la Phillips stanno per lanciare sul mercato una nuova *smart TV*, con caratteristiche identiche. Entrambe le imprese hanno già comunicato il prezzo di listino del prodotto in $p = 1500\text{€}$. Ognuna di esse si aspetta di guadagnare 100€ per ogni *smart TV* venduto. Devono decidere se effettuare una campagna pubblicitaria che costa $1\,000\,000\text{€}$. La domanda complessiva data da $Q = 115\,000 - 10p$.

Se le due imprese fanno pubblicità oppure se nessuna delle due la fa, si ripartiscono a metà il mercato. Se una sola delle due imprese farà pubblicità, allora conquisterà i $3/4$ dell'intero mercato (l'altra, dovrà accontentarsi di $1/4$). Si rediga una matrice dei payoff e si definiscano le strategie che saranno utilizzate dalle due imprese. L'equilibrio di Nash è Pareto-efficiente?

Soluzione:

Dal testo emerge che il profitto di ognuna delle due imprese dipende dalla propria scelta sul fare o non fare pubblicità, ma anche dal comportamento dell'impresa rivale. Per poter risolvere l'esercizio è necessario calcolare il profitto atteso della Sony e della Philips nei seguenti 4 scenari:

- Se nessuna delle due imprese fa pubblicità il prezzo di vendita della *smart TV* è pari a $p = 1500\text{€}$ per le due imprese, mentre il costo unitario di produzione è pari a $CT = 1400\text{€}$. Questi valori sono entrambi noti. Il profitto per televisore venduto è $\Pi = p - CT = 100\text{€}$ per ambedue le imprese. Inoltre, in assenza di pubblicità, ogni impresa avrà un volume di vendite pari alla metà dell'intero mercato.

Sostituendo $p = 1500\text{€}$ all'interno della funzione di domanda aggregata, si ottiene che, in assenza di pubblicità, ognuna delle due imprese venderà $Q = 100\,000$ *smart TV* e otterrà un profitto pari a

$$\Pi_i = 100 \cdot 50\,000 = 5\,000\,000\text{€},$$

per $i = 1, 2$.

Soluzioni degli Esercizi

2. Nel caso in cui entrambe facciano pubblicità, le imprese si dividono a metà il mercato, vendono al prezzo $p = 1500\text{€}$, ma ottengono un profitto pari a quello del caso precedente al netto delle spese sostenute per la campagna pubblicitaria, pari a $1\,000\,000\text{€}$. Pertanto risulta

$$\Pi_i = 100 \cdot 50\,000 - 1\,000\,000 = 4\,000\,000\text{€},$$

per $i = 1, 2$.

3. e 4. Nei due casi (simmetrici) in cui un'impresa faccia pubblicità e l'altra non la faccia, l'impresa che fa pubblicità ottiene i $3/4$ dell'intero mercato, mentre l'altra ottiene $1/4$. Dato che al prezzo $p = 1500\text{€}$ la domanda aggregata è pari a $Q = 100\,000$ televisori, l'impresa che fa pubblicità venderà $75\,000$ televisori, mentre l'impresa che non fa pubblicità ne venderà $25\,000$.

Il profitto dell'impresa che fa pubblicità è quindi dato dal profitto unitario per la quantità venduta a cui va sottratto il costo della campagna pubblicitaria. Il profitto dell'altra impresa è invece ottenuto come il prodotto del profitto unitario per la quantità venduta. In sintesi, risulta

- $\Pi_i = 100 \cdot 75\,000 - 1\,000\,000 = 6\,500\,000\text{€}$ (l'impresa i -esima fa pubblicità),
- $\Pi_j = 100 \cdot 25\,000 = 2\,500\,000\text{€}$ (l'impresa j -esima non fa pubblicità).

Ricapitolando, la risultante matrice dei payoff è quella sottostante. È evidente che la strategia "No pubblicità" è dominata per ciascuna impresa, quindi entrambe le imprese decideranno di fare pubblicità.

		Philips	
		no pubblicità	pubblicità
Sony	no pubblicità	$\pi_P = 5\,000\,000$ $\pi_S = 5\,000\,000$	$\pi_P = 6\,500\,000$ $\pi_S = 2\,500\,000$
	pubblicità	$\pi_P = 2\,500\,000$ $\pi_S = 6\,500\,000$	$\pi_P = 4\,000\,000$ $\pi_S = 4\,000\,000$

Si noti che l'equilibrio di Nash è "pubblicità-pubblicità" non è un equilibrio Pareto-efficiente: entrambe le imprese otterrebbero payoff più alti se decidessero di non fare pubblicità, ma ognuna delle due sa che perseguendo questa strategia perderebbe quote di mercato, in quanto l'altra impresa avrebbe interesse a sostenere la campagna pubblicitaria.

Esercizio 12.16

Nella notte di capodanno il massimo sarebbe organizzarsi con dei veri amici, affittare una casa e organizzare una grande festa che duri tutta la notte. Tuttavia per fare questo occorrono molto tempo e denaro: bisogna trovare la casa, pagare l'affitto, fare la spesa ecc. Tutto questo lo fanno anche i vostri amici che potrebbero comportarsi da *free rider* e lasciare a voi tutta l'incombenza dell'organizzazione per poi godersi la festa senza aver lavorato. Data la seguente matrice dei payoff, nella quale π_V e π_A sono rispettivamente il vostro payoff e quello dei vostri amici, si determini l'equilibrio di Nash.

voi \ amici	organizzare la festa	non fare nulla
organizzare la festa	$\pi_V = 10, \pi_A = 10$	$\pi_V = 0, \pi_A = 100$
non fare nulla	$\pi_V = 100, \pi_A = 0$	$\pi_V = 1, \pi_A = 1$

Soluzione:

Si noti che, per entrambi i giocatori, la strategia “non fare nulla” domina la strategia “organizzare la festa”. Infatti, relativamente ai payoff associati, risultano $100 > 10$ e $1 > 0$. Di conseguenza, nessuno organizzerà allora la festa.

I payoff saranno quindi dati dalla coppia di strategie “non fare nulla-non fare nulla”, quindi pari a $\pi_i = 1$ per $i = V, A$.

È immediato verificare che questo equilibrio non è Pareto-efficiente perché caratterizzato da payoff inferiori a quelli associati alla strategia comune di “organizzare la festa”.

Esercizio 12.17			
Caio e Tizio partecipano ad un gioco, i cui risultati sono indicati di seguito. Si individui l'equilibrio di Nash nell'ipotesi che la scelta delle strategie sia simultanea.			
Caio \ Tizio	attacco	difesa	
attacco	$\pi_T = 200, \pi_C = 300$	$\pi_T = 100, \pi_C = 300$	
difesa	$\pi_T = 50, \pi_C = 100$	$\pi_T = 20, \pi_C = 0$	

Soluzione:

Per Tizio la strategia “attacco” è una strategia dominante (indipendentemente dalla giocata dell'altro, Tizio ottiene payoff più elevati se attacca). La stessa cosa vale per Caio (attaccando ottiene sempre payoff pari a 300, sempre maggiore di quello che otterrebbe difendosi, pari a 100 oppure a 0).

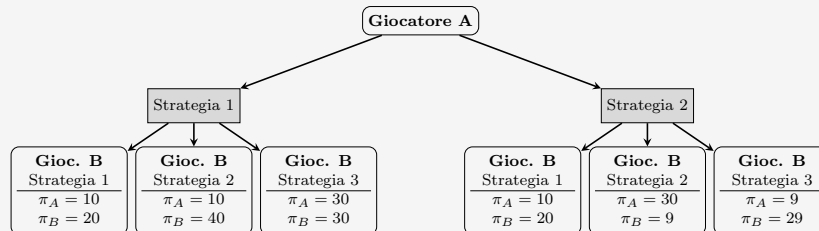
Entrambi gli agenti giocheranno decideranno di attaccare, quindi l'equilibrio di Nash è “attacco-attacco”.

Come mostra la seguente tabella, se si sviluppa l'esercizio basandosi sulla metodologia delle frecce (si individua cioè il maximin), si ottiene lo stesso risultato.

		Tizio	
		attacco	difesa
Caio	attacco	$\pi_T = 200$ $\pi_C = 300$	$\pi_T = 100$ $\pi_C = 300$
	difesa	$\pi_T = 50$ $\pi_C = 100$	$\pi_T = 20$ $\pi_C = 0$

Esercizio 12.18

Si consideri il seguente albero delle decisioni a mosse successive, relativo a 2 giocatori A e B, dove il giocatore A ha due strategie e il giocatore B ha tre strategie:



Si indichi il payoff ottenuto dai due giocatori.

Soluzione:

Se il giocatore A gioca la strategia 1:

- il giocatore B ottiene il payoff $\pi_B = 20$ se gioca la strategia 1, il payoff $\pi_B = 40$ se gioca la strategia 2 e il payoff $\pi_B = 30$ se gioca la strategia 3;
- noti i suoi payoff, il giocatore B giocherà la sua strategia 2, cioè quella che gli permette di ottenere il payoff più elevato;
- nell'ipotesi che il giocatore A giochi la strategia 1, A si aspetta di ottenere un payoff $\pi_A = 10$ (associato al payoff $\pi = 40$ del giocatore B)

Se il giocatore A gioca la strategia 2:

- il giocatore B ottiene il payoff $\pi_B = 20$ se gioca la strategia 1, il payoff $\pi_B = 9$ se gioca la strategia 2 e il payoff $\pi_B = 29$ se gioca la strategia 3;
- noti i suoi payoff, il giocatore B giocherà la sua strategia 3, cioè quella che gli permette di ottenere il payoff più elevato;
- nell'ipotesi che il giocatore A giochi la strategia 2, A si aspetta di ottenere un payoff $\pi_A = 9$ (associato al payoff $\pi = 29$ del giocatore B).

Il giocatore A è di conseguenza consapevole che otterrà il payoff $\pi = 10$ se gioca la strategia 1 oppure il payoff $\pi_A = 9$ se gioca la strategia 2. Il giocatore A, che decide per primo, sceglierà quindi la strategia 1.

Per i giocatori A e B l'equilibrio di Nash che si determina è quindi "strategia 1-strategia 2" alla quale corrispondono i payoff $\pi_A = 10$ e $\pi_B = 40$.

Esercizio 12.19

Una ristrutturazione è necessaria per un'abitazione con due appartamenti occupati da due famiglie. Queste possono scegliere se pagare (P) o non pagare ($\bar{P}$) per tale intervento. Si completi la matrice dei payoff indicando i valori interi minimi che danno come equilibrio di Nash la coppia $P - P$.

famiglia 2 \ famiglia 1		famiglia 2	
		P	$\bar{P}$
P		$\pi_1 = \text{_____}, \pi_2 = \text{_____}$	$\pi_1 = -7, \pi_2 = 6$
$\bar{P}$		$\pi_1 = 6, \pi_2 = -7$	$\pi_1 = -6, \pi_2 = -6$

Soluzione:

Affinché l'equilibrio di Nash sia la combinazione “P-P”, occorre che nella cella in alto a sinistra della tabella

- il payoff della famiglia 1 sia $\pi_1 > 6$,
- il payoff della famiglia 2 sia $\pi_2 > 6$.

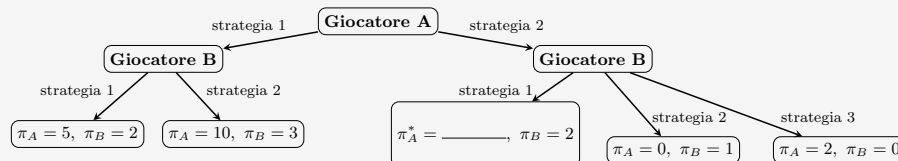
Come si vince dal seguente scenario, il valore intero minimo di payoff che rende vere entrambe queste disuguaglianze è $\pi_1 = \pi_2 = 7$.

		famiglia 2	
		P	$\bar{P}$
famiglia 1	P	$\pi_1 = 7$ $\pi_2 = 7$	$\pi_1 = -7$ $\pi_2 = 6$
	$\bar{P}$	$\pi_1 = 6$ $\pi_2 = -7$	$\pi_1 = -6$ $\pi_2 = -6$

Si noti che questo è lo schema tipico di un gioco di coordinamento (ciascun giocatore ottiene un payoff più elevato se seleziona la stessa strategia dell'altro giocatore), pertanto l'equilibrio di Nash non è unico.

Esercizio 12.20

Dato il seguente gioco in forma estesa, dove il giocatore A muove per primo e il giocatore B per secondo, all'interno della casella relativa alla strategia 2 del giocatore A e alla strategia 1 del giocatore B, si determini il valore **minimo** del payoff π_A^* in modo che tale casella rappresenti l'equilibrio di Nash (si inserisca un numero intero).



Soluzione:

Al fine di ottenere l'equilibrio di Nash dove il giocatore A sceglie la strategia 2 ed il giocatore B sceglie la strategia 1, occorre che il payoff atteso di A giocando la strategia 2 sia maggiore di quello che otterrebbe se giocasse la strategia 1.

Se il giocatore A gioca la strategia 1, è consapevole che il giocatore B risponderà giocando la strategia 2 perchè per lui è ottimale rispondere con la strategia che gli garantisce il payoff più elevato (infatti $\pi_B^2 = 3 > \pi_B^1 = 2$). In sintesi, se il giocatore A giocando la strategia 1, sa che otterrà il payoff $\pi_A = 10$.

Nel caso il giocatore A scelga la strategia 2, per il giocatore B è ottimale scegliere la strategia 1 (infatti $\pi_B^1 = 2 > \pi_B^2 = 1 > \pi_B^3 = 0$). Di conseguenza, scegliendo la strategia 2, il giocatore è consapevole di ottenere il payoff $\pi_A = \pi_A^*$.

Il giocatore A sceglierà la strategia 2 solo se $\pi_A^* > 10$. Dato che il testo richiede il minimo valore intero di payoff che garantirebbe la scelta della strategia 2, la soluzione dell'Esercizio è $\pi_A^* = 11$.

Esercizio 12.21

I comuni limitrofi di Navarra e Adelante possono accordarsi per costruire insieme uno stadio oppure un ospedale, entrambi di dimensioni grandi. Se non si mettono d'accordo, li costruiranno separatamente, ma con dimensioni inferiori. Utilizzando la seguente matrice dei payoff, quale sarà l'equilibrio di Nash se le scelte sono simultanee?

Assumendo invece che il gioco sia sequenziale (si utilizzi la rappresentazione ad albero del gioco) e che il comune di Adelante scelga per primo, quale sarà l'equilibrio di Nash?

	Navarra	Ospedale (H)	Stadio (S)
Adelante			
Ospedale (H)		$\pi_N = 5, \pi_A = 7$	$\pi_N = 2, \pi_A = 2$
Stadio (S)		$\pi_N = 2, \pi_A = 2$	$\pi_N = 7, \pi_A = 5$

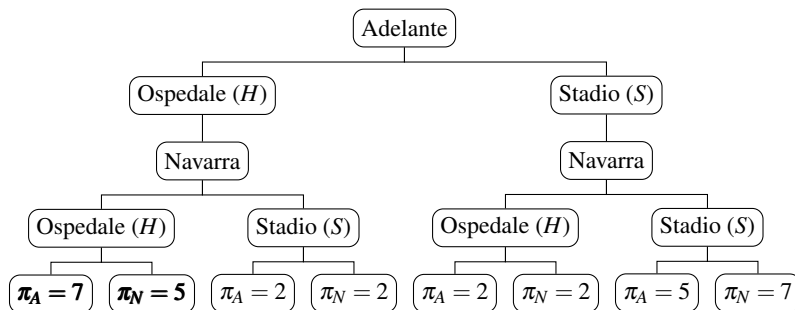
Soluzione:

Se il gioco è a mosse simultanee, utilizzando il metodo delle frecce nella matrice dei payoff, si ottiene il seguente scenario.

		Navarra	
		Ospedale (H)	Stadio (S)
Adelante	Ospedale (H)	$\pi_N = 5$ $\pi_A = 7$	$\pi_N = 2$ $\pi_A = 2$
	Stadio (S)	$\pi_N = 2$ $\pi_A = 2$	$\pi_N = 7$ $\pi_A = 5$

In questo caso l'equilibrio di Nash si ottiene per le coppie “ $H-H$ ” e “ $S-S$ ”.

Se invece il gioco fosse a mosse sequenziali, è conveniente rappresentarlo attraverso il seguente diagramma ad albero nel quale il comune di Adelante sceglie per primo.



In questo caso l'equilibrio di Nash è unico e corrisponde alla combinazione “ $H-H$ ”.

Si noti che la soluzione di questo gioco a mosse sequenziali il comune di Adelante, che sceglie per primo, ottiene il payoff più elevato perché di fatto costringe l'altro a fare la sua stessa scelta. Questo è il tipico esempio di gioco di coordinamento con payoff non simmetrici.

Esercizio 12.22

Romeo e Giulietta possono scegliere la strategia di “attacco” o quella di “difesa”, ottenendo i payoff riportati nella seguente matrice. Romeo può decidere il valore del parametro α .

Romeo \ Giulietta	attacco	difesa
attacco	$\pi_R = 50, \pi_G = 200$	$\pi_R = 50, \pi_G = 50$
difesa	$\pi_R = 200 - \alpha, \pi_G = \alpha$	$\pi_R = 20, \pi_G = 84$

Scegliendo opportunamente un valore intero α , quale sarà il massimo payoff che Romeo potrà ottenere?

Soluzione:

Se Romeo gioca “attacco”, otterrà comunque un payoff $\pi_R = 50$ mentre, se gioca “difesa”, Giulietta risponderà giocando “attacco” solo se il suo payoff è maggiore di quello che otterrebbe giocando “difesa”, pari a $\pi_G = 84$.

Per spingere Giulietta a giocare “attacco” se Romeo gioca “difesa”, occorre che $\alpha > 84$. Dato che il payoff di Romeo dipende negativamente da α , è razionale per Romeo fissare $\alpha = 95$.

Si noti che, per $\alpha = 85$, Romeo ottiene un payoff pari a $\pi_R = 200 - 85 = 115 > 50$. Il massimo payoff che Romeo può ottenere, fissando $\alpha = 85$, è allora $\pi_R = 115$.

Esercizio 12.23

La matrice dei payoff è relativa ad un gioco simultaneo tra due giocatori che possono scegliere tra due strategie S_A e S_B . Per quali valori positivi di α il gioco non ammette equilibri di Nash?

giocatore 1 \ giocatore 2	S_A	S_B
S_A	$\pi_1 = 10, \pi_2 = 30$	$\pi_1 = 60, \pi_2 = \alpha$
S_B	$\pi_1 = 40, \pi_2 = 40$	$\pi_1 = 50, \pi_2 = 50$

Soluzione:

Dalla matrice dei payoff emerge che, se il giocatore 1 gioca S_B , per il giocatore 2 è razionale giocare S_B . La freccia nella seconda riga della matrice dei payoff va verso destra.

Se il giocatore 2 gioca S_A , per il giocatore 1 è razionale scegliere S_B . La freccia della prima colonna della matrice dei payoff è quindi diretta verso il basso.

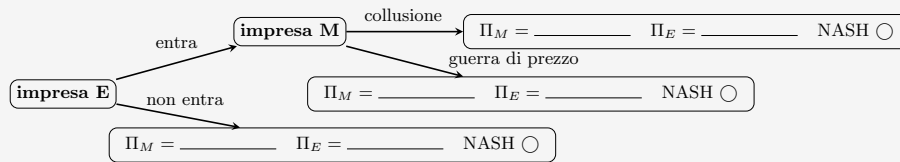
Infine, se il giocatore 2 giocasse S_B , per il giocatore 1 sarebbe ottimale rispondere con S_A . La freccia della seconda colonna della matrice dei payoff va verso l'alto.

L'equilibrio di Nash non esiste se le frecce non convergono in nessuna cella. A tal fine, occorre che la freccia della prima riga vada verso sinistra, cioè deve accadere che, se il giocatore 1 sceglie S_A , per il giocatore 2 è ottimale scegliere S_A . Come mostra la matrice dei payoff sottostante, questo richiede che $\alpha < 30$.

		giocatore 2	
		S_A	S_B
giocatore 1	S_A	$\pi_1 = 10$ $\pi_2 = 30$	$\pi_1 = 60$ $\pi_2 = \alpha < 30$
	S_B	$\pi_1 = 40$ $\pi_2 = 40$	$\pi_1 = 50$ $\pi_2 = 50$

Esercizio 12.24

Un'impresa monopolista (M) è minacciata dall'ingresso sul mercato di una potenziale entrante (E). La funzione di domanda di mercato è $p = 60 - 3Q$, dove $Q = q_M + q_E$, mentre le due imprese hanno identica funzione di costo $CT_i = 24q_i$ con $i = M, E$. In un gioco a mosse sequenziali, l'impresa E muove per prima decidendo se entrare o meno. Se entra, l'impresa M può adottare due strategie: può accomodare l'entrata accettando di colludere oppure può fare una guerra di prezzo come nel modello di Bertrand. Si inseriscano i profitti delle due imprese (Π_M e Π_E) nella seguente rappresentazione "ad albero" e, con una croce, si indichi qual è l'equilibrio di Nash.



Soluzione:

Nel caso l'impresa E non entri, l'impresa M rimane monopolista e decide il livello di produzione sulla base dell'uguaglianza $R' = C'$, dalla quale si ottiene

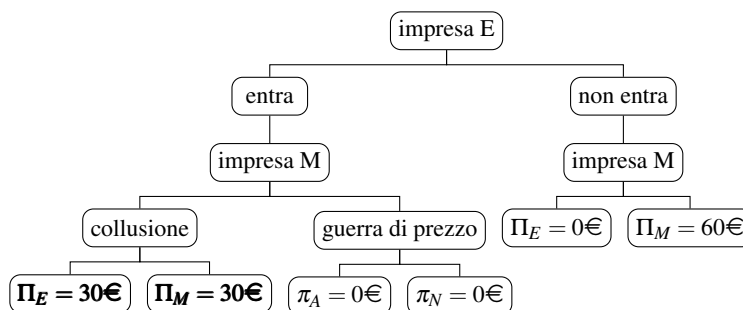
$$60 - 6Q = 24 \Rightarrow Q^* = 2$$

a cui, dalla funzione di domanda, si ottiene $p^* = 54\text{€}$. Il profitto dell'impresa è quindi pari a

$$\Pi_M = 2(54 - 24) = 60\text{€}.$$

Se l'impresa E entra sul mercato e le due imprese colludono (si noti che, in questo Esercizio, per semplicità si assume che le due imprese riescano a colludere anche se dall'analisi vista in precedenza è noto che in caso di collusione ognuna delle due imprese avrebbe interesse a defezionare dall'accordo collusivo), il prezzo sarà uguale a quello di monopolio, ognuna delle due imprese produrrà per metà del mercato ed il profitto di ognuna è pari $\Pi_M = \Pi_E = 30\text{€}$.

Naturalmente, l'ipotesi di ingresso con comportamento à la Bertrand porterà le due imprese verso il profitto nullo. Il seguente albero delle decisioni riepiloga i risultati.



Se l'impresa E decide di entrare, l'impresa M ottiene un profitto più elevato ($\Pi_E = 30\text{€}$) giocando "collusione". Non entrando, non otterrebbe alcun profitto. L'equilibrio di Nash è ottenuto quindi con l'ingresso dell'impresa E e la collusione tra le due imprese. La minaccia della guerra dei prezzi posta in essere dall'impresa M non è quindi credibile.

Esercizio 12.25

Utilizzando i dati di cui al punto 1. di pag. 506 (paragrafo 1 sulla deterrenza all'entrata), si supponga che la minaccia da parte della compagnia A-Lines sia di fissare il prezzo di $p = 120\text{€}$ in caso di ingresso della B-Lines. Si costruisca l'albero delle decisioni e si definisca l'equilibrio di Nash.

Soluzione:

Se la A-Lines dichiara pubblicamente l'intenzione di fissare il prezzo a 120€ , la B-Lines risponderà utilizzando la sua strategia migliore tra l'ingresso e il non ingresso. Data la minaccia della A-Lines, la B-Lines deve decidere se entrare o meno e, successivamente, la A-Lines deve a sua volta decidere se mettere in atto la sua minaccia o giocare la strategia "Cournot". Si determinano così i seguenti scenari:

- (a) la B-Lines non entra e la A-Lines continua a comportarsi da monopolista. Il profitto delle due imprese è

$$\Pi_A = 36504\text{€} \quad \Pi_B = 0\text{€};$$

- (b) la B-Lines entra e la A-Lines mantiene la minaccia fissando il prezzo $p = 120\text{€}$

- La B-lines accetta di lasciare 260 passeggeri sul volo della A-lines e ragiona sulla funzione di domanda residuale cioè la domanda al netto dei 260 passeggeri che volano con la A-Lines- È data da $p = 504 - 260 - q_B$ da cui deriva il ricavo marginale $R' = 244 - 2q_B$. Eguagliando al costo marginale nullo, si ottengono $q_B = 122$ passeggeri e $p_B = 122\text{€}$; il profitto delle due compagnie sarebbe Il profitto della B-lines sarebbe pari a

$$\Pi_A = 120 \cdot 260 - 27000 = 4200\text{€} \quad \Pi_B = 122^2 - 27000 = -12166\text{€}.$$

quindi negativo.

- La B-lines fissa un prezzo pari a quello della A-lines, cioè $p = 120$, la domanda complessiva sarebbe pari a $Q = 384\text{€}$. Assumendo stesse quote di mercato, $q_A = q_B = 192$ e la B-lines avrebbe un profitto pari a:

$$\Pi_B = \Pi_A = 120 \cdot 192 - 27000 = -3960\text{€}.$$

Soluzioni degli Esercizi

- La B-Lines fissa un prezzo inferiore a quello della A-Lines, ad esempio $p_B = 119\text{€}$, riuscendo quindi a riempire l'aereo ($q_B = 260$); la compagnia A opererebbe con funzione di domanda data da $p = 504 - 260 - q_A$ che, per $p = 120$ porta a $q_A = 124$, le due compagnie avrebbero profitti pari a:

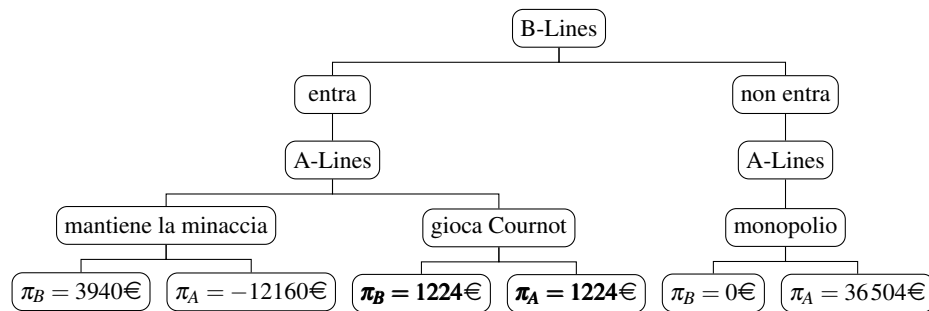
$$\Pi_B = 119 \cdot 260 - 27000 = 3940\text{€} \quad \Pi_A = 120 \cdot 124 - 27000 = -12120\text{€}$$

In questo caso è difficile supporre che la A-lines continui ad operare applicando il prezzo di $p = 120\text{€}$ perché agirebbe in perdita e dovrebbe uscire dal mercato. La A-lines potrebbe abbassare il prezzo a $p_A = 118\text{€}$. Tra le due compagnie si arriverebbe ad una guerra di prezzo, i profitti finirebbero per annullarsi per entrambe le imprese. Pertanto sarebbe da valutare la strategia ottimale delle due imprese partendo da un contesto in cui $p_A = 120$ e $p_B = 119$, ma questo esula dagli scopi dell'Esercizio dove, per ipotesi, il prezzo è fissato a $p_A = 120$.

Nel caso di prezzo della A-lines pari a 120€ , per la B-lines è ottimale quindi fissare il prezzo a 119€ perché è l'unica strategia che porta a profitti positivi, pari a $\Pi_B = 3940\text{€}$.

- (c) la B-Lines entra e la A-Lines non mantiene la sua minaccia giocando “Cournot” che garantisce ad entrambe le compagnie un profitto pari a $\Pi_A = \Pi_B = 1224\text{€}$.

Schematicamente, tutti questi risultati sono riepilogati nell'albero delle decisioni sottostante.



In conclusione:

- la minaccia di fissare il prezzo del biglietto a $p = 120\text{€}$ non è credibile perché, se la B-Lines decidesse di entrare sul mercato giocando la sua strategia migliore, quello di fissare il prezzo a 119€ , per la A-Lines sarebbe conveniente giocare la strategia “Cournot” e non dare seguito alla minaccia stessa;
- la B-Lines ha convenienza ad entrare perché l'alternativa di non entrare non le genera profitto;
- poiché la A-Lines ottiene un profitto positivo giocando “Cournot”, l'esito finale del gioco è quello in cui entrambe giocano Cournot e ottengono un profitto pari a $\Pi_B = 1224\text{€}$.

Capitolo 13

Esercizio 13.1

. In una certa area territoriale i lavoratori sono caratterizzati da differenti produttività (y) e differenti salari di riserva, cioè i salari minimi che li spingono ad accettare un lavoro. In particolare:

- i lavoratori di tipo A hanno salario di riserva $w_A = 900\text{€}$ e produttività $y = 1350\text{€}$;
- i lavoratori di tipo B hanno salario di riserva $w_B = 1200\text{€}$ e produttività $y = 1800\text{€}$;
- i lavoratori di tipo C hanno salario di riserva $w_C = 1500\text{€}$ e produttività $y = 1950\text{€}$.

L'imprenditore non può conoscere il tipo di lavoratore che si presenta al colloquio per l'assunzione, ma sa che la probabilità che il lavoratore sia di tipo A è del 20%, che sia di tipo B è del 70% e che sia di tipo C è del 10%. Quale livello di salario ha convenienza a fissare se il suo profitto ammonta a $\Pi = y - w$ per ogni lavoratore?

Soluzione:

Se l'imprenditore fissasse salari inferiori a 1200€, solo i lavoratori di tipo A si presenterebbero al colloquio. Per spingerli a presentarsi, sarebbe sufficiente offrire loro un salario pari a 900€ mensili. Pertanto, se l'imprenditore offrisse un salario di 900€, solo gli individui con produttività pari a $y = 1350\text{€}$ si presenterebbero e loro profitto ammonterebbe quindi

$$\Pi(900) = 1350 - 900 = 450\text{€}.$$

Se l'imprenditore offrisse un salario pari a 1200€, sia i lavoratori di tipo A , sia quelli di tipo B si presenterebbero al colloquio. L'imprenditore non può riconoscere se i lavoratori sono di tipo A o di tipo B a causa delle asimmetrie informative, ma sa che 2 su 9 saranno di tipo A e che i rimanenti 7 su 9 saranno di tipo B . Se assumesse un lavoratore di tipo A , l'imprenditore guadagnerebbe $1350 - 1200 = 150\text{€}$, mentre se assumesse un lavoratore di tipo B , guadagnerebbe $1800 - 1200 = 600\text{€}$. Pertanto, il suo profitto atteso sarà

$$\Pi(1200) = \frac{2}{9}150 + \frac{7}{9}750 = 500\text{€}.$$

Se l'imprenditore offrisse un salario pari a 1500€, i lavoratori di tipo A , quelli di tipo B e quelli di tipo C si presenterebbero al colloquio. L'imprenditore non può riconoscere a quale categoria questi lavoratori appartengono, ma sa che 1 su 5 sono di tipo A , che 7 su 10 sono di tipo B e che 1 su 10 è di tipo C . Se assumesse un lavoratore di tipo A , l'imprenditore guadagnerebbe $1350 - 1500 = -150\text{€}$, se assume un lavoratore di tipo B guadagnerebbe $1800 - 1500 = 300\text{€}$, mentre se assumesse un lavoratore di tipo C guadagnerebbe $1950 - 1500 = 450\text{€}$. Pertanto, il suo profitto atteso ammonta a

$$\Pi(1500) = \frac{1}{5}(-150) + \frac{7}{10}300 + \frac{1}{10}450 = 225\text{€}.$$

Il profitto atteso più elevato, pari a 500€, viene quindi ottenuto quando viene offerto un salario di 1200€.

Esercizio 13.2

Un concessionario di automobili propone ai suoi venditori due contratti di lavoro: il contratto A, con salario fisso di $w_0 = 1600\text{€}$ e il contratto B con retribuzione fissa di 625€ e una quota pari al 10% del valore delle automobili vendute. I candidati sanno che con probabilità f non venderanno nulla e con probabilità $(1 - f)$ venderanno un'automobili al mese. Il valore dell'automobile venduta è di 18750€ . La probabilità f dei candidati poco capaci è pari al 50%, quella dei candidati più abili è pari al 30%.

Sapendo che la funzione di utilità di tutti i candidati è $u(w) = \sqrt{w}$, dove w è il salario che percepiranno e che il costo di ogni automobile per il concessionario è di 15500€ ,

- quale contratto sceglieranno gli individui poco capaci?
- quale contratto sceglieranno gli individui più abili?
- quale profitto otterrà il concessionario dai due tipi di candidato?
- il concessionario avrà interesse ad assumere gli individui poco capaci?

Soluzione:

Esistono due contratti possibili. Il contratto A, con salario fisso pari a $w_0 = 1600\text{€}$, garantisce a tutti i venditori una utilità certa pari a

$$u_A = \sqrt{w_0} = \sqrt{1600} = 40.$$

Data la probabilità (f) di non vendere alcuna auto, l'utilità attesa del venditore derivante dalla scelta del salario flessibile (contratto B) è invece data da

$$E(u_B) = (1 - f)\sqrt{625 + 1875} + f\sqrt{625} = 50(1 - f) + 25f = 50 - 25f = 25(2 - f).$$

L'utilità attesa derivante dalla scelta del salario flessibile dipende quindi dalla probabilità di vendere un'auto al mese ($1 - f$) che è differente per gli individui più abili e quelli meno capaci.

Indicando con $E(u_B^-)$ l'utilità attesa dei lavoratori meno capaci (per i quali $f = 50\%$) e con $E(u_B^+)$ quella dei lavoratori abili (per i quali $f = 30\%$), si ottengono

$$Eu_B^+ = 25 \cdot 1.5 = 37.5 \quad \text{e} \quad Eu_B^- = 25 \cdot 1.7 = 42.5,$$

quindi gli individui meno capaci ottengono un'utilità attesa inferiore a quella attesa, cioè risulta $E(u_B^-) < u_A$, quindi sceglieranno quindi il contratto A con il salario fisso. Gli individui abili ottengono invece un'utilità attesa superiore a quella certa, cioè $E(u_B^+) > u_A$, quindi sceglieranno il contratto B con salario flessibile. Di fatto si ottiene un *equilibrio separatore*.

Il profitto che il concessionario si aspetta da un venditore poco capace che sceglie il contratto A e che con una probabilità del 50% non vende nulla (ma deve comunque essere retribuito con salario fisso) è quindi pari a

$$\Pi^- = 0.50 \cdot (-1600) + 0.50(3250 - 1600) = -800 + 825 = 25\text{€}.$$

Il profitto che il concessionario si aspetta da un venditore abile e che con una probabilità del 30% non vende nulla e che sceglie il contratto B, con salario flessibile, è quindi pari a

$$\pi_B = 0.30 \cdot (-625) + 0.70 \cdot [3250 - (1875 + 625)] = -187.5 + 525 = 337.5\text{€}.$$

Riassumendo, dato che

- gli individui poco capaci sceglieranno il contratto A,
- gli individui più abili sceglieranno il contratto B,
- il concessionario ottiene un profitto atteso pari a 25€ dagli individui poco capaci e pari a 337.5€ dagli individui abili,

il concessionario avrà quindi interesse ad assumere anche i venditori meno capaci.

• ————— Esercizio 13.3 ————— •

Ottenere una laurea magistrale porta ad un salario più elevato di x € per ognuno dei 30 anni lavorativi, ma per ottenere la laurea magistrale occorrono due anni. Per ognuno dei due anni, si deve rinunciare a 1200€ di salario come diplomato e si devono sostenere costi pari a 1000€ per gli individui “bravi”, e a 2000€ per tutti gli altri.
Qual è il livello minimo di x che permette un equilibrio separatore? Qual è il suo livello massimo? (Si supponga che gli individui non attualizzino i costi e i redditi futuri)

Soluzione:

Il costo annuale di iscriversi all'università comprende anche il costo opportunità, cioè del reddito di 1200€ che si sarebbe potuto conseguire lavorando come diplomato, il quale ammonta a $1200 + 1000 = 2200$ € per gli individui bravi e a $1200 + 2000 = 3200$ € per tutti gli altri. Per i due anni di studi all'università il costo da sostenere per frequentare l'università ammonta quindi a 4400€ per i bravi e a 6400€ per gli altri.

Ottenere il titolo di laurea permette di incrementare il salario di x € rispetto al salario dei diplomati (pari a 1200€) per ognuno dei 30 anni lavorativi, cioè il salario complessivo del laureati è pari a $30 \cdot (x + 1200)$.

Un individuo bravo, se si laurea, ottiene un reddito al netto dei costi della laurea pari a

$$30(x + 1200) - 4400 = 30x + 31600\text{€},$$

mentre un individuo meno bravo, qualora riuscisse a laurearsi, otterrebbe un reddito al netto dei costi della laurea pari a

$$30(x + 1200) - 6400 = 30x + 29600\text{€}.$$

Tutti gli individui, se decidono di fermarsi al diploma, ottengono un reddito da lavoro pari a (si ricordi i due anni di salario perso da diplomato sono conteggiati nel costo opportunità del laureato)

$$30 \cdot 1200 = 36000\text{€}.$$

Gli individui bravi preferiranno quindi continuare gli studi se il premio salariale per la laurea risulta tale che

$$30x + 31600 \geq 36000 \Rightarrow x \geq 146.67\text{€}.$$

Gli altri individui preferiranno quindi interrompere gli studi se il premio salariale per la laurea è tale che

$$30x + 29600 < 36000 \Rightarrow x < 213.33\text{€}.$$

In sintesi, se il premio in termini di salario risulta compreso nell'intervallo

$$146.67\text{€} \leq x < 213.33\text{€}.$$

Sotto questa condizione si ottiene un equilibrio separatore, cioè un equilibrio dove solo gli individui bravi arrivano alla laurea.

Capitolo 14

Esercizio 14.1

Un'impresa in concorrenza perfetta produce un bene con funzione di costo totale $CT = 20 + q + 0.1q^2$. Il prezzo di vendita sul mercato è $p = 10\text{€}$. Per ciascuna unità prodotta, l'impresa scarica in un lago rifiuti che determinano un aumento dei costi di produzione per i pescatori del lago pari a 4.5€ .

Si determini il valore della produzione dell'impresa nel breve periodo che sia ottimale per la collettività.

Soluzione:

L'impresa descritta nel testo non tiene conto nella sua funzione di costo totale dei costi ambientali generati dai rifiuti prodotti e scaricati nel lago. Dal punto di vista dell'intera collettività, è invece necessario tenere conto di questi costi, cioè considerare il costo sociale. La funzione di costo sociale è quindi data da

$$CT_S(q) = \left(20 + q + \frac{1}{10}q^2\right) + 4.5q,$$

dove il termine entro la parentesi tonda indica il costo privato, mentre l'ultimo addendo, $4.5q$, indica il costo causato dalle esternalità negative.

La quantità socialmente ottima da produrre si ottiene eguagliando il costo marginale dell'intera collettività al prezzo, quindi si ottiene

$$C'_S(q) = p \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{1}{5}q + 4.5 = 10 \quad \Rightarrow \quad q^* = 22.5.$$

Esercizio 14.2

Si considerino due produttori: il primo, un floricoltore, ha funzione di costo totale $CT_F = 530 + F^2$, dove F è la quantità di fiori prodotta; il secondo, un apicoltore, ha funzione di costo totale $CT_A = 50 + 5M^2 - 6F$, dove M è la quantità di miele prodotta. Che tipo di imposta o di sussidio deve essere introdotto se si vuole che i due produttori realizzino un ottimo paretiano? (si precisi chi deve pagare/percepire l'imposta o il sussidio e l'ammontare unitario di tale trasferimento)

Soluzione:

La funzione di costo dell'apicoltore dipende negativamente dalla quantità di fiori prodotta dal floricoltore: tipico caso di esternalità positive. Il benessere sociale può essere definito come somma dei profitti delle due imprese. La quantità ottimale di fiori da produrre per la collettività (F_S) si ottiene dalla somma delle funzioni di profitto delle due imprese, cioè

$$\Pi = p_F F - (530 + F^2) + p_M M - (50 + 5M^2 - 6F),$$

dove p_F e p_M sono rispettivamente il prezzo dei fiori ed il prezzo del miele. Attraverso la condizione del primo ordine, si ottiene

$$\frac{\partial \Pi}{\partial F} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_F - 2F + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_S = \frac{p_F}{2} + 3.$$

Per fare in modo che il floricoltore produca la quantità F_S , occorre che la produzione di fiori sia sussidiata in modo tale che la sua funzione di profitto sia

$$\Pi_F = p_F F - (530 + F^2) + sF,$$

dove s è l'importo del sussidio. Massimizzando il proprio profitto, il floricoltore produce

$$\frac{\partial \Pi_F}{\partial F} = 0 \Rightarrow p_F + s = 2F \Rightarrow F^* = \frac{p_F}{2} + \frac{s}{2};$$

al fine di ottenere un livello di produzione di fiori socialmente ottimale, deve valere

$$F_S = F^* \Rightarrow \frac{p_F}{2} + 3 = \frac{p_F}{2} + \frac{s}{2} \Rightarrow s^* = 6\text{€}.$$

L'importo ottimale del sussidio da erogare al floricoltore ammonta a $s^* = 6\text{€}$. Si noti che questo importo risulta pari al beneficio marginale ottenuto dall'apicoltore.

Esercizio 14.3

Un'impresa monopolista ha intrapreso la costruzione di pannelli solari in un certo Stato. La funzione di costo totale di questa impresa è $CT(q) = 6400q$, mentre la funzione di domanda di pannelli solari è data da $p = 20000 - q$. Ogni pannello solare sostituisce 20 quintali di idrocarburi e ogni quintale di idrocarburi genera danni pari a 0.00001€ ad ognuno dei 60000000 di individui presenti nella paese.

A quanto ammonterebbe la tassa pigouviana che lo Stato impone a questa impresa? A quanto ammonterebbe la produzione di pannelli solari se lo Stato si comportasse in modo efficiente?

Soluzione:

L'impresa che produce pannelli solari genera, anche se indirettamente, esternalità positive perché permette di ridurre l'utilizzo di idrocarburi inquinanti. Ogni pannello sostituisce 20 quintali di idrocarburi ed ogni quintale di idrocarburi consumato produce danni pari a $0.00001 \cdot 60000000 = 600\text{€}$ sull'intera collettività. Di conseguenza, la produzione di ogni pannello solare permette di ridurre i danni ambientali per $600 \cdot 20 = 12000\text{€}$.

Lo Stato dovrebbe quindi intervenire sovvenzionando l'impresa che produce pannelli solari in misura pari al beneficio marginale generato sulla collettività dalla produzione di ogni pannello, cioè fissare un sussidio $s = 12000\text{€}$ per ogni pannello.

L'impresa che produce pannelli presenta una funzione di profitto data da

$$\Pi = (20000 - q)q - 6400q + 12000q = 25400q - q^2.$$

La produzione ottimale è quindi data da

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0 \Rightarrow 25400 = 2q \Rightarrow q^* = 12700.$$

Per $q^* = 12700$, la produzione di idrocarburi si riduce di $12700 \cdot 20 = 254000$. I danni generati alla collettività dall'utilizzo di idrocarburi si riducono di $\Delta D = 12700 \cdot 12000 = 152400000\text{€}$. Si noti che questo importo è precisamente pari alla somma spesa dallo Stato per sovvenzionare l'impresa che produce idrocarburi.

Capitolo 15

Esercizio 15.1

Un sistema economico è composto da 400 individui. La funzione di disponibilità alla spesa è data da $G = 30 - p$ per la metà di loro e $G = 20 - 0.5p$ per l'altra metà. Si determini la funzione aggregata di disponibilità alla spesa.

Soluzione:

La funzione di disponibilità aggregata alla spesa è data dalla somma delle funzioni inverse di domanda le quali, per i 200 individui di tipo 1, vengono calcolate come somma verticale della disponibilità alla spesa dei singoli individui. Analiticamente si ottiene

$$p = 200(30 - G_1) = 6000 - 200G_1;$$

per i 200 individui di tipo 2 invece risulta

$$p = 200(40 - 2G_2) = 8000 - 400G_2.$$

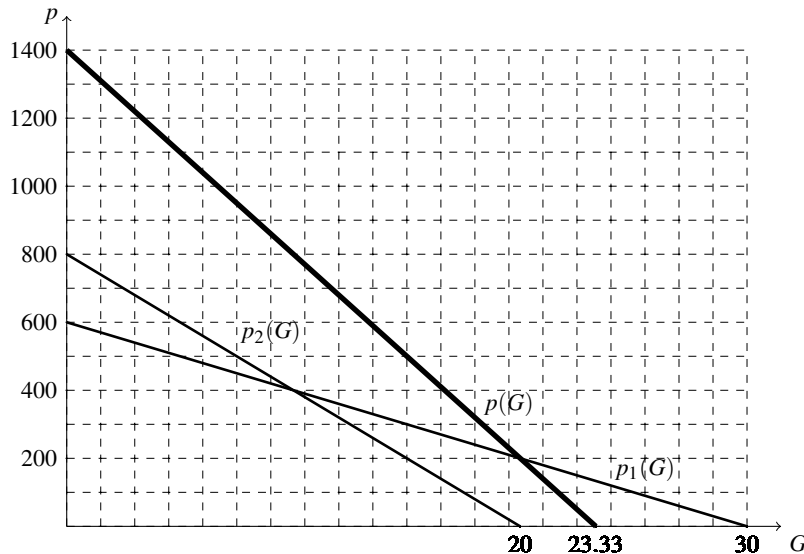
La funzione aggregata di disponibilità alla spesa ha quindi equazione data da

$$p = 6000 - 200G_1 + 8000 - 400G_2 = 14000 - 600G.$$

Si consideri che, per $p = 0\text{€}$, gli individui di tipo 2 domandano $G_2 = 20$, mentre gli individui di tipo 1 domandano $G_1 = 30$. In base a questo risultato, una quantità positiva di bene pubblico è desiderata da tutti gli individui, anche se in quantità inferiore o pari a $G = 20$, mentre sarà desiderata solo dagli individui di tipo 1 se la quantità fornita è superiore a $G = 20$, ma inferiore a $G = 30$; per $G > 30$ nessuno è disposto a pagare. Pertanto, la funzione di domanda aggregata è

$$p = \begin{cases} 14000 - 600G & \text{se } G \leq 20 \\ 6000 - 200G & \text{se } 20 < G \leq 30 \\ 0 & \text{se } G > 30. \end{cases}$$

Il grafico sottostante mostra le curve di domanda dell'insieme degli individui di tipo 1 ($p_1(G)$), di quelli di tipo 2 ($p_2(G)$), e dell'intera collettività ($p(G)$).



• ————— Esercizio 15.2 ————— •

La funzione di utilità del Sig. Verdi è data da $u(G, x) = xG + x$, dove G indica il consumo di un bene pubblico e x il consumo di un bene privato. Sapendo che p_G e p_x sono i prezzi del bene pubblico e del bene privato, e che m è il suo reddito, si determini la funzione di disponibilità alla spesa per il bene pubblico del Sig. Verdi.

Soluzione:

La funzione di disponibilità alla spesa del Sig. Verdi è semplicemente la sua funzione di domanda di bene pubblico (G) scritta in forma inversa. Seguendo la procedura illustrata nel capitolo 4, il Sig. Verdi dovrà scegliere tra due beni x e G massimizzando la sua funzione di utilità a condizione che il vincolo di bilancio sia rispettato. Dato che il saggio marginale di sostituzione derivante dalla funzione di utilità è dato da

$$|SMS(x, G)| = \frac{G+1}{x},$$

dall'equazione (4.16) del testo si ottiene

$$\begin{cases} \frac{G+1}{x} = \frac{p_x}{p_G} \\ G = \frac{m}{p_G} - \frac{p_x}{p_G}x. \end{cases}$$

Dalla prima equazione, risulta

$$x = \frac{p_G(G+1)}{p_x}.$$

Sostituendo nella seconda, si ottiene

$$G = \frac{m}{p_G} - \frac{p_x}{p_G} \frac{p_G(G+1)}{p_x} \Rightarrow m = p_G(2G+1) \Rightarrow p_G = \frac{m}{2G+1}$$

che rappresenta la funzione di disponibilità a contribuire alla spesa pubblica per il sig. Verdi (oppure, la funzione di domanda inversa per il bene pubblico). Se, ad esempio, il Sig. Verdi disponesse di un reddito $m = 30\text{€}$, per la prima unità del bene pubblico sarebbe disposto a pagare $p_G = \frac{30}{2 \cdot 1 + 1} = 10\text{€}$, per la seconda $p_G = \frac{30}{2 \cdot 2 + 1} = 6\text{€}$, per la terza $p_G = \frac{30}{2 \cdot 3 + 1} \simeq 4.286\text{€}$ e così via.

Capitolo 16

Esercizio 16.1

In un certo mercato, la funzione di domanda ha equazione $Q = 0.5Y - 0.2p$, dove Y è il reddito lordo di imposta. La funzione di offerta ha equazione $Q = 50 + 0.3p$, mentre il reddito dei consumatori ammonta a $Y = 600\text{€}$. Si calcoli la variazione di prezzo provocata dall'introduzione di un'imposta sul reddito del 10%.

Soluzione:

Dato che il reddito dei consumatori è pari a $Y = 600\text{€}$, la funzione di domanda può essere scritta come

$$Q = 300 - 0.2p.$$

Eguagliando la domanda e l'offerta, si ottiene

$$300 - 0.2p = 50 + 0.3p \Rightarrow p^* = 500\text{€}.$$

Se il reddito viene tassato del 10%, si riduce da $Y = 600\text{€}$ a $Y' = 540\text{€}$, quindi la funzione di domanda diventa

$$Q' = 270 - 0.2p.$$

Eguagliando questa nuova funzione di domanda alla funzione di offerta, si ottiene

$$270 - 0.2p = 50 + 0.3p \Rightarrow p^* = 440\text{€},$$

quindi l'introduzione dell'imposta sul reddito provoca una riduzione della domanda che ha determinato la riduzione del prezzo pari a $\Delta p = 440 - 500 = -60\text{€}$.

Esercizio 16.2

Le curve di offerta e di domanda (in forma inversa) in un mercato perfettamente concorrenziale hanno rispettivamente equazione $p = 60 + 2Q^s$ e $p = 300 - 4Q^d$. Sul mercato viene introdotta un'imposta $t = 2\text{€}$ per ogni unità venduta.

1. Qual è l'incidenza dell'imposta sui consumatori?
2. A quanto ammonta la variazione del surplus dei consumatori?

Soluzione:

In assenza di imposta, la quantità di equilibrio è data da

$$p(Q^s) = p(Q^d) \Rightarrow 60 + 2Q = 300 - 4Q \Rightarrow Q^* = 40,$$

quindi il prezzo di equilibrio è $p^* = 140\text{€}$. Il surplus dei consumatori (si veda paragrafo 4.5.8) è dato quindi da

$$SC = \frac{(300 - 140)40}{2} = 3200\text{€}.$$

L'introduzione dell'imposta $t = 2\text{€}$ sposta parallelamente verso l'alto la funzione inversa di offerta

$$p = 60 + 2 + 2Q^s = 62 + 2Q^s.$$

In presenza dell'imposta, la quantità di equilibrio è data da

$$62 + 2Q = 300 - 4Q \Rightarrow Q^* = \frac{119}{3} \approx 39.67,$$

quindi il prezzo di equilibrio è $p^* = \frac{424}{3} \approx 141.33\text{€}$.

Il consumatore si vede aumentare il prezzo di

$$\frac{424}{3} - 140 = \frac{4}{3} \approx 1.33\text{€}.$$

1. Dato che l'imposta è pari a $t = 2\text{€}$ e che il consumatore deve pagare circa 1.33€ in più per ogni unità acquistata, l'incidenza dell'imposta sul consumatore è data da

$$\Psi_C = \frac{1}{2} \frac{4}{3} = \frac{2}{3},$$

cioè i due terzi dell'imposta sono a carico del consumatore, quindi un terzo dell'imposta è a carico del venditore.

Per ottenere questo risultato è altresì possibile applicare direttamente l'equazione (16.6), cioè

$$\Psi_C = \frac{b}{b+h} = \frac{4}{4+2} = \frac{2}{3},$$

in quanto la funzione di domanda e quella di offerta sono entrambe lineari, con $b = 4$ (coefficiente angolare della funzione di domanda in valore assoluto) e $h = 2$ (coefficiente angolare della funzione di offerta).

2. In presenza di imposta, il surplus dei consumatori è dato da

$$SC = \frac{\left(300 - \frac{424}{3}\right) \frac{119}{3}}{2} \approx 3146.88\text{€}$$

La riduzione del surplus dei consumatori a seguito dell'introduzione dell'imposta è pari a $\Delta SC = 3146.88 - 3200 \approx -53.12\text{€}$.

Esercizio 16.3

Un mercato è caratterizzato dalle curve di domanda e di offerta le cui equazioni sono $Q^d = 5 - p$ e $Q^s = 1 + p$. Supponendo che lo Stato introduca un'imposta pari a $t = 2\text{€}$ per ogni unità venduta. Si calcolino:

1. il gettito fiscale dello Stato derivante da tale imposta;
2. la variazione degli incassi delle imprese;
3. la variazione della spesa dei consumatori.

Soluzione:

Le funzioni di domanda e offerta proposte dal testo in forma inversa sono:

$$p = 5 - Q^d \quad \text{e} \quad p = 1 + Q^s,$$

quindi l'equilibrio di mercato in assenza di imposta è dato da

$$Q^d = Q^s \Rightarrow 5 - Q = 1 + Q \Rightarrow Q^* = 2 \Rightarrow p^* = 3\text{€}.$$

Soluzioni degli Esercizi

L'introduzione di un'imposta a carico del produttore sposta la funzione inversa di offerta parallelamente verso sinistra in misura pari all'importo dell'imposta ($p = 1 + t + Q^s$). Per $t = 2$, l'equilibrio di mercato dopo l'introduzione dell'imposta è quindi dato da

$$Q^d = Q^s(t) \Rightarrow 5 - Q = 1 + 2 + Q \Rightarrow Q^*(t) = 1 \Rightarrow p^*(t) = 4\text{€}.$$

Il gettito fiscale è dato dall'imposta per la quantità scambiata, quindi risulta

$$GF(t) = tQ^*(t) = 2 \cdot 1 = 2\text{€}.$$

Le imprese, prima dell'introduzione dell'imposta incassavano

$$RT = p^*Q^* = 3 \cdot 2 = 6\text{€},$$

mentre dopo l'introduzione dell'imposta incassano 2€ per ogni unità venduta, in quanto il prezzo lordo è pari a $p^*(t) = 4\text{€}$, ma poi devono versare $t = 2\text{€}$ per ogni unità venduta allo Stato. Pertanto, il ricavo totale delle imprese sarà pari a

$$RT(t) = [p^*(t) - t]Q^*(t) = (4 - 2) \cdot 1 = 2\text{€}.$$

Le imprese vedono quindi i loro incassi ridursi di $RT - RT(t) = 6 - 2 = 4\text{€}$.

I consumatori, prima dell'introduzione dell'imposta spendevano

$$E = p^*Q^* = 3 \cdot 2 = 6\text{€},$$

mentre dopo l'introduzione dell'imposta, spendono 4€ per ogni unità acquistata, cioè

$$E(t) = p^*(t)Q^*(t) = 4 \cdot 1 = 4\text{€},$$

quindi spendono 2€ in meno.

Esercizio 16.4

La funzione di produzione di breve periodo di un'impresa è data da $q = 100L^{1/2}$. Il salario per occupato è pari a $w = 2\text{€}$ e il prezzo del bene è $p = 1.5\text{€}$.

Di quanto varia il numero dei lavoratori occupati nell'impresa se viene introdotta dal fisco un'imposta tale che il prezzo unitario del bene aumenti di 0.5€?

Soluzione:

Il testo richiede di calcolare la variazione dell'occupazione dell'impresa causata dall'introduzione di una imposta. È necessario quindi calcolare l'utilizzo del lavoro prima e dopo l'imposta, tenendo conto che l'imposta sposta verso l'alto la funzione di costo totale. Occorre quindi esplicitare la funzione di costo dell'impresa prima e dopo l'introduzione dell'imposta.

La funzione di costo totale dell'impresa (che utilizza solo lavoratori) dipende dalla funzione di produzione che, in forma inversa, può essere scritta come

$$L = \frac{1}{10000}q^2.$$

La funzione di costo totale dell'impresa è quindi

$$CT = wL = \frac{1}{5000}q^2,$$

quindi il costo marginale è $C' = \frac{1}{2500}q$. Dall'uguaglianza tra prezzo e costo marginale si ottiene

$$p = C' \Rightarrow 1.50 = \frac{1}{2500}q \Rightarrow q^* = 3750.$$

Dalla funzione di produzione, si ottiene

$$L^* = \frac{1}{10000}q^{*2} = \frac{1}{10000}3750^2 = 1406.25$$

(si noti che lo stesso risultato poteva essere raggiunto uguagliando la produttività marginale del lavoro al salario reale, dove $q'_L = 50L^{-1/2}$ e $\frac{w}{p} = \frac{2}{1.5} = \frac{4}{3} \approx 1.33$.)

Dopo l'introduzione dell'imposta, il costo totale diventa:

$$CT = (w + 0.5)L = \frac{2.5}{10000}q^2 = \frac{1}{4000}q^2,$$

quindi il costo marginale è $C' = \frac{1}{2000}q$. Dall'uguaglianza tra prezzo e costo marginale si ottiene

$$p = C' \Rightarrow 1.50 = \frac{1}{2000}q \Rightarrow q^* = 3000.$$

Sostituendo nella funzione di produzione, si ottiene

$$L^* = \frac{1}{10000}q^{*2} = \frac{1}{10000}3000^2 = 900$$

La riduzione del livello occupazionale dovuta all'imposta sull'utilizzo del lavoro è quindi pari a $\Delta L = 900 - 1406.25 = -506.25$.

Esercizio 16.5

In sede di contrattazione collettiva in una certa industria è stato fissato il salario (w) al livello di $w = 0.50\text{€}$. Il prezzo del prodotto venduto dall'industria in un mercato di concorrenza perfetta è pari a 10€ . La domanda di lavoro dell'industria è ricavata sulla base della funzione di produzione $Q = L^{1/2}$, mentre l'offerta di lavoro è costante e pari a $L^s = 400$ unità.

Si supponga che l'obiettivo dello Stato sia di raggiungere la piena occupazione attraverso l'erogazione di un sussidio di $s\text{€}$ alle imprese per ogni occupato.

Si determini il livello del sussidio che permette di raggiungere l'obiettivo.

Soluzione:

Per ottenere la piena occupazione occorre che la domanda di lavoro sia pari all'offerta di lavoro. Lo Stato dovrà sussidiare le imprese per un importo pari a $s\text{€}$ per lavoratore, in modo tale che domandino precisamente 400 lavoratori.

Data la funzione di produzione in forma inversa, $L = Q^2$ ed il costo per lavoratore, pari al salario meno il sussidio ricevuto dallo Stato ($w - s$), è possibile scrivere la funzione di profitto dell'impresa

$$\Pi = pQ - CT(Q) = pQ - (w - s)L = 10Q - (0.50 - s)Q^2.$$

Applicando la condizione del primo ordine, si ottiene la quantità ottimale da produrre in presenza di un sussidio pari a s , infatti

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Q} = 0 \Rightarrow 10 - 2(0.50 - s)Q = 0 \Rightarrow Q^*(s) = \frac{10}{1 - 2s}.$$

La produzione dell'impresa dipende quindi positivamente dal sussidio erogato dallo Stato; il livello di occupazione dell'impresa è quindi pari a

$$L^*(s) = [Q^*(s)]^2 = \left(\frac{10}{1 - 2s} \right)^2.$$

Al fine di ottenere la piena occupazione, lo Stato fisserà il sussidio in modo tale che $L^*(s) = 400$, quindi risulta

$$\left(\frac{10}{1 - 2s} \right)^2 = 400 \Rightarrow 10 = 20(1 - 2s) \Rightarrow \frac{1}{2} = 1 - 2s$$

da cui si ottiene il livello del sussidio che garantisce la piena occupazione dato da

$$s^* = \frac{1}{4} = 0.25\text{€}.$$

Il sussidio che permette di ottenere la piena occupazione deve quindi essere pari alla metà del salario.

Esercizio 16.6

Siano $Q^d = 1000 - 10p$ e $Q^s = -10 + 5p$ rispettivamente le funzioni di domanda e di offerta di mercato. Se il governo volesse massimizzare il gettito fiscale, quale imposta a carico del produttore dovrebbe imporre? Di quanto si ridurrebbe il surplus dei consumatori?

Soluzione:

Lo Stato deve decidere il livello dell'imposta (t) che massimizza il gettito fiscale $GF(t) = tQ^*(t)$. Al fine di calcolare l'imposta che massimizza il gettito fiscale occorre scrivere le funzioni di domanda e di offerta in forma inversa. A seguito dell'introduzione dell'imposta, la curva di offerta si sposta parallelamente verso l'alto per un importo pari a t , quindi risulta

$$p = 100 - \frac{1}{10}Q^d = 2 + t + \frac{1}{5}Q^s.$$

La quantità di equilibrio è

$$Q^d = Q^s \Rightarrow 100 - \frac{1}{10}Q = 2 + t + \frac{1}{5}Q \Rightarrow Q^*(t) = \frac{980}{3} - \frac{10}{3}t,$$

mentre il gettito fiscale è dato da

$$GF(t) = tQ^*(t) = t \left(\frac{980}{3} - \frac{10}{3}t \right).$$

Lo Stato sceglie t in modo da massimizzare il gettito fiscale, quindi, attraverso la condizione del primo ordine, si ottiene

$$\frac{\partial \text{GF}(t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{980}{3} - \frac{20}{3}t = 0 \Rightarrow t^* = 49\text{€},$$

cioè, lo stato ottiene il massimo gettito fiscale fissando un'imposta unitaria pari a 49€. Tale gettito fiscale massimo risulta essere pari a

$$\text{GF}(t^*) = t^* Q(t^*) = 49 \left(\frac{980}{3} - \frac{10}{3} 49 \right) \approx 163.33\text{€}.$$

Il calcolo della variazione del surplus dei consumatori dovuto all'introduzione dell'imposta richiede la conoscenza del surplus per $t = 0\text{€}$ e per $t = 49\text{€}$.

Al fine del calcolo del surplus, dato che $Q^*(t) = \frac{980}{3} - \frac{10}{3}t$, dalla funzione di domanda (ovviamente lo stesso risultato poteva essere ottenuto utilizzando la funzione di offerta) si ricava

$$p^*(t) = 100 - \frac{1}{10} \left(\frac{980}{3} - \frac{10}{3}t \right) \Rightarrow p^*(t) = \frac{202}{3} + \frac{1}{3}t$$

Il surplus dei consumatori come funzione dell'imposta t è dato da:

$$\text{SC}(t) = \frac{1}{2} \left[100 - \left(\frac{202}{3} + \frac{1}{3}t \right) \right] \left(\frac{980}{3} - \frac{10}{3}t \right) = \frac{1}{2} \frac{10(98-t)^2}{9} = \frac{5}{9}(98-t)^2$$

Per $t = 0\text{€}$, vale $\text{SC} \approx 5335.56\text{€}$, mentre per $t = 49\text{€}$, vale $\text{SC} \approx 1333.89\text{€}$. Pertanto l'imposta riduce il surplus dei consumatori in misura pari a $\Delta \text{SC} = 1333.89 - 5335.56 \approx -4001.67\text{€}$.

● ————— **Esercizio 16.7** ————— ●

Si determini la perdita di benessere sociale che si ottiene a seguito dell'introduzione di una tassa sulle vendite pari a $t = 3\text{€}$ in un mercato in cui le funzioni di domanda e di offerta sono rispettivamente $p = 188 - Q$ e $p = 2 + 2Q$.

Soluzione:

La perdita di benessere sociale, come descritta nella Figura 16.2 (graficamente corrisponde all'area del triangolo), è data dall'importo dell'imposta moltiplicato per la riduzione della quantità scambiata e diviso per due, quindi

$$\Delta \text{BS} = \frac{t \Delta Q}{2}.$$

Date le funzioni di domanda e di offerta, e tenendo conto che la tassa aumenta l'intercetta verticale della funzione di offerta, l'equilibrio per una tassa di importo unitario pari a t è dato da

$$188 - Q = 2 + t + 2Q \Rightarrow Q^*(t) = \frac{186 - t}{3}$$

Per $t = 0\text{€}$, risulta $Q^*(0) = 62$, mentre per $t = 3\text{€}$, risulta $Q^*(3) = 61$.

Di conseguenza, la riduzione della quantità prodotta causata dall'introduzione dell'imposta è pari a $\Delta Q = 61 - 62 = -1$. La perdita di benessere sociale è quindi

$$\Delta \text{BS} = \frac{13}{2} = 1.5\text{€}.$$

Lo stesso risultato poteva essere ottenuto calcolando il surplus dei consumatori, il surplus dei produttori e il gettito fiscale nei due casi di $t = 0\text{€}$ e $t = 3\text{€}$.

Per un generico valore di t , dato $Q^*(t) = \frac{186-t}{3}$, si ottiene

$$p^*(t) = 188 - \frac{186-t}{3} \Rightarrow p^*(t) = \frac{378+t}{3}.$$

Per $t = 0\text{€}$, si ottengono $p^*(0) = 126\text{€}$ e $Q^*(0) = 62$. I corrispondenti surplus dei consumatori e dei produttori sono

$$SC = \frac{(188-126) \cdot 62}{2} = 1922\text{€}, \quad SP = \frac{(126-2) \cdot 62}{2} = 3844\text{€} \quad \text{e} \quad GF = 0\text{€}$$

dai quali deriva che il benessere sociale ammonta a $BS(0) = 1922 + 3844 = 5766\text{€}$.

Per $t = 3\text{€}$, si ottengono $p^*(3) = 127\text{€}$, $p_N^*(3) = p^*(3) - 3 = 124\text{€}$, e $Q^*(3) = 61$, quindi risultano

$$SC = \frac{(188-127) \cdot 61}{2} = 1860.5\text{€}, \quad SP = \frac{(124-2) \cdot 61}{2} = 3721\text{€} \quad \text{e} \quad GF = 361 = 183\text{€},$$

mentre il benessere sociale ammonta a $BS(3) = 1860.5 + 3721 + 183 = 5764.5\text{€}$.

La variazione di benessere sociale dovuta all'imposta è quindi data da:

$$\Delta BS = 5764.5 - 5766 = -1.5\text{€}.$$

Naturalmente si giunge ovviamente allo stesso risultato ottenuto in precedenza.

Esercizio 16.8

La funzione di utilità di un consumatore è data da $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, dove x_1 e x_2 indicano le quantità consumate dei due beni. Il prezzo del bene 1 è $p_1 10\text{€}$, quello del bene 2 è pari a $p_2 = 9\text{€}$. Se il reddito del consumatore è pari a $Y = 450\text{€}$ e lo Stato introduce un'imposta sul bene 2 pari a $t = 2\text{€}$ per ogni unità consumata, di quanto dovrebbe aumentare il reddito affinché la l'utilità non cambi in seguito all'introduzione dell'imposta sul bene 2?

Soluzione:

Il testo chiede il calcolo della variazione di reddito di un individuo al fine di *compensare* la variazione del prezzo di un bene in seguito all'introduzione di una imposta (per le variazioni compensative di reddito, si veda la sezione 4.5.8).

È quindi necessario calcolare l'utilità indiretta dell'individuo in assenza dell'imposta, e valutare quale reddito sarebbe necessario per raggiungere la stessa utilità dopo che l'imposta è stata introdotta.

Si noti che la funzione di utilità dell'individuo rappresenta beni perfettamente sostituiti (se si calcola il saggio marginale di sostituzione, si vede che esso è costante). Le curve di indifferenza sono quindi delle rette con pendenza -1 , e ciò vuol dire che il consumatore acquisterà tra i beni 1 e 2 solo quello che costa meno.

In assenza dell'imposta, costa meno il bene 2. Dato il reddito dell'individuo pari a 450€ , questo individuo acquisterà allora $x_2^* = \frac{450}{9} = 50$ e, ovviamente, $x_1 = 0$. L'utilità indiretta in assenza dell'imposta sarà quindi

$$u^* = x_1^* + x_2^* \Rightarrow u^* = 50 + 0 = 50.$$

In seguito all'introduzione dell'imposta, il bene 2 costa $p_2 = 11\text{€}$, mentre il bene 1 costa $p_1 = 10\text{€}$. Pertanto l'individuo acquisterà solo il bene 1, meno costoso.

Il livello di reddito ($\tilde{Y}$) che gli permette di raggiungere la stessa utilità che raggiungeva senza l'imposta pari a $u^* = 50$ sarà tale per cui

$$x_1 = \frac{\tilde{Y}}{10},$$

quindi l'utilità che l'individuo può raggiungere acquistando solo il bene 1 è pari a

$$u(\tilde{Y}) = x_1 + 0 = \frac{\tilde{Y}}{10}.$$

L'utilità che otteneva senza imposta è pari a 50, quindi deve valere

$$50 = \frac{\tilde{Y}}{10},$$

cioè $\tilde{Y} = 500\text{€}$. Se il reddito dell'individuo aumentasse di $\Delta Y = 500 - 450 = 50\text{€}$, allora la sua utilità non sarebbe modificata dall'introduzione dell'imposta sul bene 2.

Esercizio 16.9

Il Sig. Rossi guadagna 20000€ annui al netto delle tasse e acquista 100 unità di un bene di prima necessità (bene A) al prezzo $p_A = 100\text{€}$ e 50 unità di un bene di lusso (bene B) al prezzo $p_B = 200\text{€}$.

In vista delle prossime elezioni, il partito conservatore propone una riduzione delle tasse sul reddito che comporta un aumento del reddito disponibile del 5% a parità di prezzi (proposta 1), mentre il partito progressista propone una riduzione dell'IVA, che comporta una riduzione del prezzo dei beni di prima necessità del 12.5% (proposta 2). Utilizzando un'opportuna rappresentazione grafica, è possibile stabilire qual è la proposta più vantaggiosa per il Sig. Rossi?

Soluzione:

Il testo dell'esercizio chiede esplicitamente di aiutarsi con una rappresentazione grafica. Dato che la funzione di utilità dell'individuo è ignota, è possibile rappresentare solo il suo vincolo di bilancio, che in forma esplicita, ha equazione

$$x_B = \frac{Y}{p_B} - \frac{p_A}{p_B} x_A.$$

Questo vincolo può essere rappresentato graficamente in tre situazioni: quella iniziale, quella che si avrebbe nel caso vinca il partito conservatore, quella che si avrebbe nel caso vinca il partito progressista.

Nella situazione iniziale risulta

$$x_B = \frac{20000}{200} - \frac{100}{200} x_A \Rightarrow x_B = 100 - 0.5x_A,$$

nella situazione proposta dal partito conservatore, che propone un aumento del reddito disponibile di 1000€ (x_B^C in rosso), si ottiene

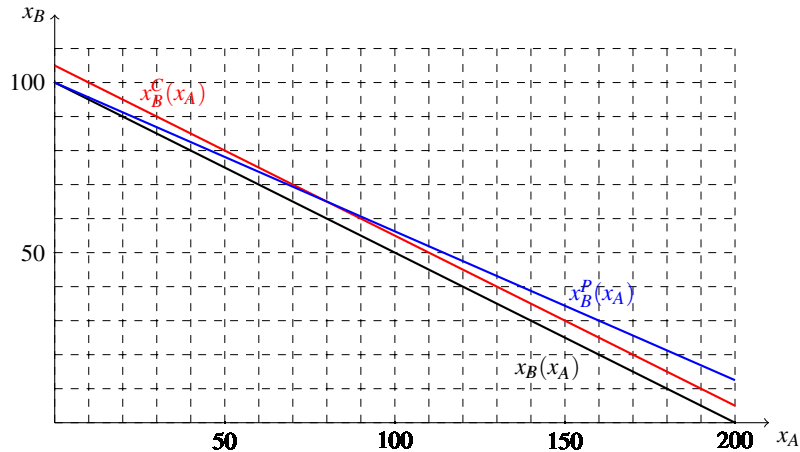
$$x_B^C = \frac{21000}{200} - \frac{100}{200} x_A \Rightarrow x_B^C = 105 - 0.5x_A,$$

Soluzioni degli Esercizi

mentre nella situazione proposta dal partito progressista, che propone una riduzione del prezzo del bene A del 12.5% (x_B^P in blu) vale

$$x_B^P = \frac{20000}{200} - \frac{87.5}{200}x_A \Rightarrow x_B^P = 100 - 0.4375x_A.$$

Dati i risultati suesposti, il grafico sottostante rappresenta i 3 vincoli di bilancio



Nella rappresentazione grafica è evidenziata la scelta dell'individuo posta in essere nella situazione iniziale, con $x_A = 100$ e $x_B = 50$. Quella scelta doveva essere ottimale per l'individuo.

Dalla rappresentazione grafica si nota che il vincolo di bilancio si sposta verso l'esterno in ambedue i casi, ma che, partendo dalla situazione iniziale, l'insieme dei panieri raggiungibili per l'individuo è più ampio nel caso proposto del partito progressista. Quindi l'individuo voterà per questo partito. Si noti che un differente individuo che nella situazione avesse scelto, ad esempio, $x_A = 60$ e $x_B = 70$ avrebbe preferito votare per il partito conservatore.

Esercizio 16.10

In un mercato, le funzioni inverse di domanda e di offerta sono $p = 6400(1 - \tau) - Q^d$ e $p = t + Q^s$, dove τ è l'aliquota dell'imposta sul reddito e t è una imposta sul consumo del bene Q . Assumiamo che $\tau = 25\%$ e che $t = 0$. Supponiamo adesso che lo Stato introduca una imposta $t = 200\text{€}$ sul consumo del bene Q . Di quanto deve ridursi l'imposta sul reddito (τ) se lo Stato vuole mantenere invariato il surplus di consumatori?

Soluzione:

L'esercizio chiede di calcolare la riduzione dell'imposta sui redditi necessaria per far sì che il surplus dei consumatori non cambi a fronte dell'introduzione di un'imposta unitaria sui consumi pari a $t = 200\text{€}$.

La modalità più semplice per risolvere l'esercizio si basa sul calcolo del surplus dei consumatori

per una generica imposta sui consumi (t) e per una generica imposta sui redditi (τ).
Una volta calcolato questo surplus, definito con $SC(t, \tau)$, occorre calcolarlo nella situazione iniziale quindi $SC(0, 0.25)$ e nella situazione con $t = 200$ e un generico τ , quindi $SC(200, \tau)$. Infine calcolare per quale τ i due surplus sono uguali.
Dall'uguaglianza tra domanda e offerta, si ottiene

$$6400(1 - \tau) - Q = t + Q \Rightarrow Q^*(t, \tau) = \frac{6400(1 - \tau) - t}{2}$$

di conseguenza, sostituendo $Q^*(t, \tau)$ nella funzione di domanda (o alternativamente nella funzione di offerta)

$$p(t, \tau) = 6400(1 - \tau) - \frac{6400(1 - \tau) - t}{2} = \frac{6400(1 - \tau) + t}{2}.$$

Il surplus dei consumatori, calcolato con le solite modalità, è quindi

$$SC(t, \tau) = \frac{1}{2} \left(6400(1 - \tau) - \frac{6400(1 - \tau) + t}{2} \right) \frac{6400(1 - \tau) - t}{2} = SC(t, \tau) = \frac{1}{2} \left(\frac{6400(1 - \tau) - t}{2} \right)^2,$$

quindi

$$SC(t, \tau) = \frac{1}{8} [6400(1 - \tau) - t].$$

Questo surplus può allora essere calcolato nella situazione iniziale, con $t = 0\text{€}$ e $\tau = 0.25\text{€}$, si ottiene

$$SC(0, 0.25) = \frac{1}{8} [6400(1 - 0.25)] = 600\text{€}$$

e può essere calcolato dopo l'introduzione dell'imposta sui consumi pari a $t = 200\text{€}$, per un generico τ

$$SC(200, \tau) = \frac{1}{8} [6400(1 - \tau) - 200].$$

Eguagliando si ottiene

$$SC(0, 0.25) = SC(200, \tau) \Rightarrow 600 = \frac{1}{8} [6400(1 - \tau) - 200] \Rightarrow 4800 + 200 = 6400(1 - \tau),$$

quindi

$$\frac{25}{32} = 1 - \tau \Rightarrow \tau = 1 - \frac{25}{32} = 0.21875.$$

L'imposta sui redditi τ necessaria per compensare i consumatori a fronte dell'introduzione dell'imposta sui consumi pari a $t = 200\text{€}$ dovrebbe quindi essere pari al 21.875%.

Dato che era fissata al livello del 25%, dovrebbe essere ridotta di $\Delta\tau = 25\% - 21.875\% = 3.125\%$.
