

Note e commenti al testo

Analisi su $\mathbb{R}$ – guida ai principi dell'analisi matematica

Luigi Chierchia

1ed 8838624771 · 9788838624773

Aggiornato al 24 agosto 2026

Questo documento raccoglie note, commenti e precisazioni su alcuni punti del testo e potrà essere aggiornato periodicamente con nuove note.

Tutti i riferimenti a equazioni, proposizioni, pagine, ecc. sono al testo, in particolare, dopo il titolo della “nota/commento” viene indicato tra parentesi quadrate il paragrafo/sezione del testo a cui si riferisce.

Indice delle note e dei commenti

Non uniforme continuità: un criterio sequenziale [§2.6.1]	2
Un commento sulle ipotesi della Proposizione 2.55 [§2.6.1]	2
Teorema di Weierstrass: una dimostrazione per bisezione [§2.6.4]	2
Un limite notevole: $\log n! \sim n \log n$ [§2.7.4]	3
Sulla dimostrazione della regola di Bernoulli–Hôpital [§3.1.2]	3
Sulla dimostrazione del Lemma 3.26 [§3.2.2]	4
Sull'enunciato del Lemma 3.27 [§3.2.2]	4
I limiti notevoli (3.57) senza la regola di Bernoulli–Hôpital [§3.2.3]	4
Una generalizzazione della regola di Leibniz [§3.3]	5
Funzioni a scalini e partizioni [§4.2.2]	5
Un'osservazione sulle somme di Riemann [§4.2.2]	6
Sulle ipotesi del Corollario 4.34 (integrazione per parti) [§4.3.1]	6
“Leibniz continuo” [§4.4]	6
Osservazioni sui criteri della radice e del rapporto [§5.1.4]	7
Su una proprietà del limite superiore [§5.1.4]	8
Una caratterizzazione di raggio di convergenza positivo [§5.2.1]	8
Sulla regolarità delle serie di potenze [§5.2.2]	9
Funzioni C^∞ non analitiche [§5.2.3]	10
Serie di Taylor–Maclaurin della tangente [§5.2.3]	11
Algebra dei limiti in $\mathbb{C}$ [§5.2.4]	12
Teorema di addizione per l'esponenziale complesso [§5.2.4]	12
Interno, chiusura e frontiera: semplici relazioni [§6.1.2]	14
Una dimostrazione immediata di Bolzano–Weierstrass [§6.2.1]	14

Non uniforme continuità: un criterio sequenziale [§2.6.1]

La negazione della uniforme continuità (cfr. Eq. (2.30) a p. 76) è:

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tale che } \forall \delta > 0, \exists x, y \in A \text{ per cui } |x - y| < \delta \text{ e } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon. \quad (*)$$

e tale relazione a sua volta (prendendo $\delta = 1/n$ con $n \in \mathbb{N}$ in $(*)$) implica il seguente¹

Criterio di non uniforme continuità *Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non è uniformemente continua su A se e solo se esiste $\varepsilon > 0$ ed esistono due successioni in A , $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, tali che $\lim |x_n - y_n| = 0$ e $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ per ogni n .*

Questo criterio può essere utile per mostrare, in taluni casi, che una funzione continua non è uniformemente continua. Ad esempio, $f(x) := \cos x^2$ (che è continua su $\mathbb{R}$) non è uniformemente continua su $\mathbb{R}$: prendendo $x_n = \sqrt{2\pi n}$ e $y_n = \sqrt{2\pi n + \pi/2}$ si ha che $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$ e

$$|x_n - y_n| = \frac{\pi/2}{x_n + y_n} \rightarrow 0,$$

quindi vale $(*)$ con $\varepsilon = 1$, per cui f non è uniformemente continua su $\mathbb{R}$.

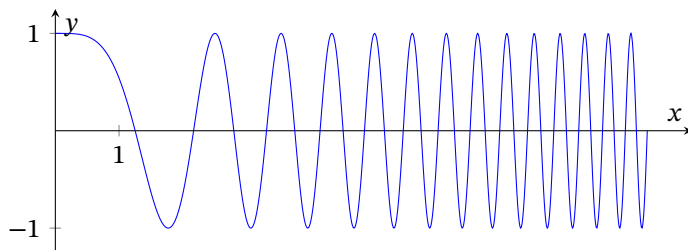


Grafico di $f(x) = \cos x^2$.

Il grafico evidenzia come le oscillazioni di f diventino sempre più rapide al crescere di x , il che, per $x \rightarrow +\infty$ fa perdere l'uniforme continuità.

Un commento sulle ipotesi della Proposizione 2.55 [§2.6.1]

L'ipotesi che I sia un intervallo nell'enunciato della Proposizione 2.55 non può essere omessa: $f : x \in I := \mathbb{N} \mapsto f(x) = x^2$ è uniformemente continua su I (basta prendere $0 < \delta < 1/2$) ma ovviamente ha crescita quadratica e non lineare.

Teorema di Weierstrass: una dimostrazione per bisezione [§2.6.4]

Diamo qui una dimostrazione alternativa a quella data alle pp. 80-81 del Teorema di Weierstrass su intervalli chiusi e limitati $[a, b]$ con $-\infty < a < b < +\infty$. Questa dimostrazione usa il “metodo di bisezione” (e non fa uso del Lemma 2.64). Come osservato nel testo basta dimostrare il caso del massimo (il caso del minimo segue da questo considerando $-f$).

¹Questo è il testo dell'Esercizio 6.27.

Dimostrazione (del Teorema 2.63) Sia $M := \sup\{f(x) | x \in [a, b]\} \in (-\infty, +\infty]$ (è ammesso anche il caso $M = +\infty$ che, a posteriori, vedremo non si verifica). Per la Proposizione 2.42, esiste una successione $\{x_n\}$ in $[a, b]$ tale che $f(x_n) \rightarrow M$. Costruiamo iterativamente una successione di intervalli $[a_n, b_n] \subseteq [a_{n-1}, b_{n-1}]$ di lunghezza $(b-a)/2^n$ come segue. Poniamo $a_0 := a$, $b_0 := b$ e assumiamo, per $n \geq 1$, che

$$[a_{n-1}, b_{n-1}] \subseteq [a, b], \quad b_{n-1} - a_{n-1} = \frac{b-a}{2^{n-1}}, \quad \#\{j | x_j \in [a_{n-1}, b_{n-1}]\} = \infty. \quad (*)$$

Si noti che per $n = 1$ tali ipotesi sono ovviamente vere.

Definiamo ora l'intervallo $[a_n, b_n] \subseteq [a_{n-1}, b_{n-1}]$ come segue: $c_n := (a_{n-1} + b_{n-1})/2$ e

$$\begin{cases} a_n := a_{n-1}, \quad b_n := c_n, & \text{se } \#\{j \in \mathbb{N} | x_j \in [a_{n-1}, c_n]\} = \infty, \\ a_n := c_n, \quad b_n := b_{n-1}, & \text{se } \#\{j \in \mathbb{N} | x_j \in [a_{n-1}, c_n]\} < \infty. \end{cases}$$

Chiaramente, nel secondo caso (essendo $\#\mathbb{N} = \infty$), si ha che $\#\{j \in \mathbb{N} | x_j \in [c_n, b_{n-1}]\} = \infty$, e quindi vale (*) con n al posto di $n-1$. Osserviamo che la successione $\{a_n\}$ è crescente (ossia, non decrescente) e $\{b_n\}$ decrescente; quindi tali successioni hanno limite finito in $[a, b]$ e poiché $\lim b_n = \lim (a_n + (b-a)/2^n) = \lim a_n$ il limite è lo stesso $x_0 \in [a, b]$. Costruiamo, ora, (sempre iterativamente) una successione $n_k \in \mathbb{N}$ ($k \geq 0$) strettamente crescente (e quindi che tende a $+\infty$) e tale che $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$: per $k = 0$ possiamo prendere $n_0 = 1$; poi, siccome ogni $[a_k, b_k]$ contiene infiniti n tali che $x_n \in [a_k, b_k]$, possiamo sempre scegliere un $n_k > n_{k-1}$ tale che $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$. Per il teorema del confronto anche $x_{n_k} \rightarrow x_0$ e per il teorema ponte, $f(x_{n_k}) \rightarrow M$; ma per la continuità di f , $\lim_k f(x_{n_k}) = f(x_0)$ e quindi $f(x_0) = M$. ■

Un limite notevole: $\log n! \sim n \log n$ [§2.7.4]

Poiché $\log x$ è una funzione crescente, prendendo il logaritmo nelle relazioni in (2.23), tali relazioni rimangono invariate e dividendo successivamente per $n \log n$ e prendendo il limite per $n \rightarrow +\infty$, si ottiene $\log n! \sim n \log n$.

Sulla dimostrazione della regola di Bernoulli–Hôpital [§3.1.2]

A fine pagina 102 si fa un'osservazione per ridursi al caso $L \geq 0$ usando la permanenza del segno per dire che $f'/g' < 0$ vicino a x_0 e quindi che una delle funzioni è strettamente crescente e l'altra strettamente decrescente (e questo porta ad una contraddizione). Ora, in generale, questo è vero se si assume che f' e g' siano anche continue vicino a x_0 , ipotesi però non necessaria al Teorema 3.19. La cosa più semplice per evitare questa innaturale ipotesi aggiuntiva è ridefinire l'intorno V , per ε e M numeri positivi, come segue:

$$V := \begin{cases} (L - \varepsilon, L + \varepsilon) & \text{se } L \in \mathbb{R}, \\ (M, +\infty), & \text{se } L = +\infty, \\ (-\infty, -M), & \text{se } L = -\infty. \end{cases}$$

e sostituire la (3.25) con

$$f(\xi) > 0, \quad g(\xi) > 0, \quad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in \begin{cases} (L - \frac{\varepsilon}{2}, L + \frac{\varepsilon}{2}), & \text{se } L \in \mathbb{R}, \\ (2M, +\infty), & \text{se } L = +\infty, \\ (-\infty, -2M), & \text{se } L = -\infty \end{cases} \quad (3.25)$$

osservando, infine, che il caso $L = -\infty$ è del tutto analogo al caso $L = +\infty$.

Sulla dimostrazione del Lemma 3.26 [§3.2.2]

Vale la pena di osservare che $x \in [0, 1) \mapsto \sqrt{1 + g'^2}$ è una funzione strettamente crescente e quindi, per $h > 0$ tale che $x + h < 1$,

$$\alpha(h) = \sqrt{1 + g'^2(x)}, \quad \beta(h) = \sqrt{1 + g'^2(x + h)},$$

da cui, in particolare, segue immediatamente che

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \alpha(h) = \lim_{h \rightarrow 0+} \beta(h) = \sqrt{1 + g'^2(x)}.$$

Sull'enunciato del Lemma 3.27 [§3.2.2]

È facile vedere che vale un enunciato più forte del Lemma 3.27, ossia:

Lemma 3.27 *La funzione Arccos : $x \in [0, 1] \mapsto t = \text{Arccos } x$ è continua su $[0, 1]$ e strettamente decrescente, $\text{Arccos } 0 = \pi/2$, $\text{Arccos } 1 = 0$, e $\text{Arccos}([0, 1]) = [0, \pi/2]$. Inoltre, $\text{Arccos} \in C^\infty([0, 1))$ ed è strettamente decrescente e concava (strettamente su $(0, 1)$):*

$$D \text{Arccos } x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} < 0, \quad D^2 \text{Arccos } x = -\frac{x}{(1 - x^2)^{3/2}} \leq 0.$$

I limiti notevoli (3.57) senza la regola di Bernoulli-Hôpital [§3.2.3]

Nel testo si invoca la regola di Bernoulli-Hôpital per dimostrare i limiti notevoli del seno e coseno in zero; cfr. (3.57). In effetti, è molto più semplice osservare che il primo limite,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1,$$

è la derivata in $t = 0$ del seno, che è stato dimostrato essere $\cos t|_{t=0} = 1$.

Per il secondo limite, basta osservare che

$$\frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1 - \cos^2 t}{t^2(1 + \cos t)} = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \frac{1}{1 + \cos t} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (t \rightarrow 0).$$

Una generalizzazione della regola di Leibniz [§3.3]

La regola di Leibniz (formula (3.14)) ammette la seguente generalizzazione:

se f e g sono derivabili n volte in x_0 , allora

$$D^n(fg)(x_0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k f(x_0) D^{n-k} g(x_0), \quad (*)$$

(si ricorda che $D^0 f := f$).

Dimostrazione Dimostriamo (*) per induzione su $n \geq 0$. Per $n = 0$, (*) è vera per definizione, mentre per $n = 1$, (*) è la regola di Leibniz (3.14). Assumiamo (*) vera per $n \geq 1$ e dimostriamola con $n + 1$ al posto di n . Nelle seguenti identità non indichiamo esplicitamente il punto x_0 dove sono fatte le derivate.

$$\begin{aligned} D^{n+1}(fg) &= D(D^n(fg)) \stackrel{(*)}{=} D \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k f D^{n-k} g \\ &\stackrel{(3.14)}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (D^{k+1} f D^{n-k} g + D^k f D^{n+1-k} g) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{k+1} f D^{n-k} g + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k f D^{n+1-k} g \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} D^k f D^{n+1-k} g + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^k f D^{n+1-k} g \\ &= D^{n+1} f g + f D^{n+1} g + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) D^k f D^{n+1-k} g \\ &= D^{n+1} f g + f D^{n+1} g + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} D^k f D^{n+1-k} g \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} D^k f D^{n+1-k} g, \end{aligned}$$

(nella penultima uguaglianza abbiamo usato la proprietà (iii), Lemma 1.37 dei coefficienti binomiali). ■

Funzioni a scalini e partizioni [§4.2.2]

Diamo qui una dimostrazione alternativa del Lemma 4.26 che asserisce che *date due funzioni a scalini*² $f, g \in S(I)$ è possibile trovare una partizione $\{I_j\}$ $1 \leq j \leq n$ e numeri α_j e β_j tali che

$$f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{I_j} \quad g = \sum_{j=1}^n \beta_j \chi_{I_j}.$$

²Si ricordi che nella sezione §4.2 abbiamo assunto l'intervallo di riferimento I limitato (e non vuoto).

Dimostrazione Dal Lemma 4.8 segue che esistono m intervalli $J_k \subseteq I$ limitati e a due a due disgiunti su cui le funzioni f e g assumono valori costanti α_k e β_k rispettivamente ed inoltre f e g sono nulle sull'insieme elementare $E := I \setminus (\cup J_k)$. Poiché E è elementare, $E = \sqcup_h J'_h$ con $1 \leq h \leq m'$ e $J'_h \subseteq I$ intervalli limitati e a due a due disgiunti. La partizione sarà data dunque da $\{J_k\} \cup \{J'_h\}$ definendo 0 i coefficienti α'_h e β'_h di f e g sugli intervalli J'_h . ■

Un'osservazione sulle somme di Riemann [§4.2.2]

Vale la pena di osservare esplicitamente che se $f \in \mathcal{R}(I)$, $\alpha \geq 0$, e $\{I_j | 1 \leq j \leq n\}$ è una partizione di I tale che

$$\sum_{j=1}^n (\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f) |I_j| \leq \alpha, \quad (*)$$

allora, per ogni $\xi_j \in I_j$ si ha che

$$\left| \int_I f - \sum_{j=1}^n f(\xi_j) |I_j| \right| \leq \alpha.$$

Dimostrazione Su I_j si ha che $|f - f(\xi_j)| \leq \sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f$, e quindi:

$$\begin{aligned} \left| \int_I f - \sum_{j=1}^n f(\xi_j) |I_j| \right| &= \left| \sum_{j=1}^n \int_{I_j} (f - f(\xi_j)) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \int_{I_j} |f - f(\xi_j)| \\ &\leq \sum_{j=1}^n (\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f) |I_j| \stackrel{(*)}{\leq} \alpha. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Sulle ipotesi del Corollario 4.34 (integrazione per parti) [§4.3.1]

Le ipotesi del Corollario possono essere sostituite dall'ipotesi più naturale:

Siano f, g derivabili su I intervallo limitato con $f', g' \in \mathcal{R}(I)$.

Infatti, dati $a, b \in I$, essendo f e g continue sull'intervallo J di estremi a e b si ha che $f'g, fg' \in \mathcal{R}(J)$ (che sono le ipotesi fatte nel Corollario 4.34).

“Leibniz continuo” [§4.4]

Il criterio di Leibniz per serie asserisce che se $a_n \downarrow 0$, allora la serie a segni alterni $\sum (-1)^{n-1} a_n$ converge (in generale, non assolutamente). Il corrispettivo per gli integrali impropri è il seguente³

³La funzione f corrisponde alla successione $\{a_n\}$ e la funzione g periodica e a media nulla corrisponde alla successione periodica (di periodo 1) a media nulla $(-1)^{n-1}$. Cfr. anche Es. 4.19.

Criterio di Leibniz continuo Se $g \in C(\mathbb{R})$ è una funzione periodica a media nulla e $0 < f \in C^1([a, +\infty))$ è decrescente con $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$, allora $fg \in \mathcal{R}^*([a, +\infty))$, ossia fg è integrabile in senso improprio su $[a, +\infty)$.

Dimostrazione Sia $T > 0$ il periodo di g e sia

$$G(x) := \int_a^x g(t) dt.$$

Il fatto che g ha media nulla implica che $\int_c^{c+T} g = 0$ per ogni c , e questo, a sua volta implica che G è limitata. Allora, per ogni $b > a$, per il teorema fondamentale del calcolo, integrando per parti, si ha che

$$\int_a^b fg = \int_a^b fG' = [fG]_a^b + \int_a^b (-f')G. \quad (*)$$

Ora, poiché G è limitata, $f(b) \rightarrow 0$ per $b \rightarrow +\infty$ e $G(a) = 0$, si ha che $[fG]_a^b \rightarrow 0$ per $b \rightarrow +\infty$. Inoltre, poiché f è decrescente, $-f' \geq 0$ e quindi, ponendo $M = \sup |G| < +\infty$, si ha che

$$\int_a^b |(-f')G| \leq M \int_a^b |-f'| = -M \int_a^b f' = M(f(a) - f(b)) \leq Mf(a).$$

Da tale relazione e da (*) segue l'asserto. ■

Si noti che con le posizioni fatte si ha che

$$\int_a^{+\infty} fg = - \int_a^{+\infty} f'G,$$

dove l'integrale nella parte destra è assolutamente convergente.

Osservazioni sui criteri della radice e del rapporto [§5.1.4]

Nella seconda parte degli enunciati (i) dei criteri della radice e del rapporto (pp. 183 e 184) si può direttamente assumere $a_n^{1/n} \geq 1$ o $a_{n+1}/a_n \geq 1$ ($\forall n \geq N$), poiché queste ipotesi portano immediatamente al fatto che $a_n \geq 1$ per ogni $n \geq N$ nel caso della radice, e a $a_n \geq a_N$ per ogni $n \geq N$ nel caso del rapporto; in entrambi i casi si ha divergenza per il criterio necessario di Cauchy.

Nella parte (ii) dei due criteri, nel caso $\theta > 1$ (divergenza), il valore $\theta = +\infty$ è ovviamente ammesso.

Più interessante è il fatto che il criterio del rapporto è più forte del criterio della radice:

Proposizione Siano $a_j > 0$ tali che $\frac{a_{j+1}}{a_j} \rightarrow L \in \mathbb{R}^*$, allora $a_j^{1/j} \rightarrow L$.

Dimostrazione Osserviamo che se esistono $\alpha > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ tali che $\alpha < \frac{a_{j+1}}{a_j}$ per ogni $j \geq m$, iterando, segue che $\alpha^k a_m < a_{m+k}$ per ogni $k \geq 1$, e quindi (ponendo $j := m + k$),

$$\alpha < \frac{a_{j+1}}{a_j}, \quad \forall j \geq m \quad \implies \quad \alpha \left(\frac{a_m}{\alpha^m} \right)^{1/j} < a_j^{1/j}, \quad \forall j > m. \quad (*)$$

Analogamente, si ha che

$$\frac{a_{j+1}}{a_j} < \beta, \quad \forall j \geq m \quad \implies \quad a_j^{1/j} < \beta \left(\frac{a_m}{\beta^m} \right)^{1/j}, \quad \forall j > m. \quad (**)$$

Distinguiamo i tre casi (i): $L = +\infty$, (ii): $L = 0$ e (iii): $L \in (0, +\infty)$.

(i): Sia $M > 0$. Dall'ipotesi segue che esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che vale (*) con $\alpha := 2M$. Sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $\left(\frac{a_m}{\alpha^m}\right)^{1/j} > \frac{1}{2}$ per ogni $j > n$ e sia $N = \max\{n, m\}$. Dalla seconda relazione in (*) segue che $a_j^{1/j} > M$ se $j > N$. Abbiamo dimostrato che $a_j^{1/j} \rightarrow +\infty$.

(ii): Sia $\varepsilon > 0$. Dall'ipotesi segue che esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che vale (**) con $\beta := \varepsilon/2$. Sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $\left(\frac{a_m}{\beta^m}\right)^{1/j} < 2$ per ogni $j > n$ e sia $N = \max\{n, m\}$. Dalla seconda relazione in (**) segue che $a_j^{1/j} < \varepsilon$ per ogni $j > N$. Abbiamo dimostrato che $a_j^{1/j} \rightarrow 0$.

(iii): Sia $0 < \varepsilon < L$. Dall'ipotesi segue che esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che vale (*) con $\alpha := L - \varepsilon/2$ e (**) con $\beta := L + \varepsilon/2$. Sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $\left(\frac{a_m}{\alpha^m}\right)^{1/j} > \frac{L - \varepsilon}{L - \varepsilon/2}$ e $\left(\frac{a_m}{\beta^m}\right)^{1/j} < \frac{L + \varepsilon}{L + \varepsilon/2}$ per ogni $j > n$ e sia $N = \max\{n, m\}$. Dalle seconde relazioni in (*) e (**) segue che $L - \varepsilon < a_j^{1/j} < L + \varepsilon$ per $j > N$. Abbiamo dimostrato che $a_j^{1/j} \rightarrow L$. ■

In particolare, nei casi in cui il criterio della radice è inconclusivo (ossia o non esiste il limite o $a_n^{1/n} \rightarrow 1$) è inutile provare il criterio del rapporto, che darebbe lo stesso esito.

Su una proprietà del limite superiore [§5.1.4]

Diamo una dimostrazione più diretta e semplice della proprietà (ii) del Lemma 5.19, il cui enunciato è:

Sia $M := \overline{\lim} a_n$. Se $M > -\infty$, per ogni $\alpha < M$ e per ogni N esiste $n \geq N$ tale che $a_n > \alpha$

Dimostrazione $\forall m, \bar{a}_m \geq M > \alpha$. In particolare, $\bar{a}_N \geq M$ e quindi $\exists n \geq N$ tale che $a_n > \alpha$. ■

Una caratterizzazione di raggio di convergenza positivo [§5.2.1]

La formula di Cauchy-Hadamard asserisce che il raggio di convergenza R di una serie di potenze $\sum a_n(x - x_0)^n$ è dato dalla

$$R = (\overline{\lim} |a_n|^{1/n})^{-1}, \quad (\text{dove } (+\infty)^{-1} := 0 \text{ e } 0^{-1} := +\infty).$$

Quindi, $R > 0$ è equivalente a dire che $\alpha := \overline{\lim} |a_n|^{1/n} < +\infty$.

Ora, se $R > 0$, dalle proprietà del limite superiore segue che, per ogni $\beta > \alpha$, esiste N tale che $|a_n| \leq \beta^n$ per ogni $n \geq N$, per cui⁴,

$$\exists c, M \in (0, +\infty) \text{ tali che } |a_n| \leq cM^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \quad (*)$$

Viceversa, se vale (*), $|a_n|^{1/n} \leq c^{1/n}M$ e quindi $\overline{\lim} |a_n|^{1/n} \leq M < +\infty$, ossia che $R > 0$. In conclusione, $R > 0$ se e solo se vale (*).

⁴Si prenda $M = \beta$ e $c = \max\{1, |a_0|, \max_{1 \leq k < N} |a_k|/\beta^k\}$, omettendo l'ultimo massimo se $N = 1$.

Sulla regolarità delle serie di potenze [§5.2.2]

La trattazione della regolarità delle serie di potenze può essere resa più generale facendo uso del seguente criterio di derivazione termine a termine, basato sul criterio di Weierstrass (o M -test⁵).

Lemma (Weierstrass) *Sia E un intervallo di $\mathbb{R}$ e siano $u_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni derivabili tali che, se $M_n := \sup_E |u_n|$ e $M'_n := \sup_E |u'_n|$, le serie $\sum M_n$ e $\sum M'_n$ convergano. Allora, la funzione $x \in E \mapsto \sum u_n(x)$ definisce una funzione f derivabile su E e si ha che $f'(x) = \sum u'_n(x)$ per ogni $x \in E$.*

Dimostrazione Poiché $\sum M_n < +\infty$, la serie $\sum u_n(x)$ converge assolutamente per ogni $x \in E$ e definisce una funzione $x \in E \mapsto f(x)$. Fissiamo $x \in E$ e sia $h \neq 0$ tale che $x+h \in E$. Per il teorema del valor medio di Lagrange (applicato all'intervallo di estremi x e $x+h$, che è interamente contenuto in E), per ogni n esiste $t_n \in (0, 1)$ tale che

$$\frac{u_n(x+h) - u_n(x)}{h} = u'_n(x + t_n h). \quad (*)$$

Sia $\varepsilon > 0$. Poiché $\sum M'_n < +\infty$, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{n>N} M'_n < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (**)$$

Per $h \neq 0$ tale che $x+h \in E$, si consideri la funzione

$$g(h) := \sum_{n=1}^N \left(\frac{u_n(x+h) - u_n(x)}{h} - u'_n(x) \right).$$

Poiché le funzioni u_n sono derivabili, si ha che $\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = 0$, quindi, esiste $\delta > 0$ sufficientemente piccolo tale che $|g(h)| < \varepsilon/2$ per $0 < |h| < \delta$. Per tali h si ha, dunque, che

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum u'_n(x) \right| &= \left| g(h) + \sum_{n>N} \left(\frac{u_n(x+h) - u_n(x)}{h} - u'_n(x) \right) \right| \\ &\stackrel{(*)}{=} \left| g(h) + \sum_{n>N} u'_n(x + t_n h) - u'_n(x) \right| \\ &\leq |g(h)| + 2 \sum_{n>N} M'_n \stackrel{(**)}{<} \varepsilon. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

La Proposizione 5.22, il cui enunciato riportiamo qui di seguito, segue facilmente da questo Lemma.

Proposizione 5.22 *Sia $f(x) = \sum a_n(x-x_0)^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$ e sia⁶ $I := (x_0 - R, x_0 + R)$. Allora $f \in C^\infty(I)$. Inoltre, per ogni $k \geq 1$, la derivata*

⁵Per il criterio di Weierstrass (o M -test), cfr. https://it.wikipedia.org/wiki/Criterio_di_Weierstrass.

⁶Se $R = +\infty$, $I = \mathbb{R}$.

di ordine k di f , $f^{(k)}$, è la serie di potenze con lo stesso raggio di convergenza R , data da

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1) \cdots (n-k+1) (x-x_0)^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n} \frac{(n+k)!}{n!} (x-x_0)^n, \quad (x \in I), \end{aligned} \quad (5.26)$$

e, in particolare,

$$f^{(k)}(x_0) = k! a_k, \quad \forall k \geq 0. \quad (5.27)$$

Dimostrazione A meno di una traslazione nelle x possiamo assumere che $x_0 = 0$. È anche chiaro che basta dimostrare la proposizione nel caso $k = 1$, poiché il caso generale segue immediatamente per iterazione (o induzione). Assumiamo quindi $x_0 = 0$ e $k = 1$, nel qual caso la (5.26) diviene

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) x^n. \quad (5.28)$$

Dalla caratterizzazione del raggio di convergenza⁷ la serie di potenze $\sum a_n n x^{n-1}$ ha lo stesso raggio di convergenza di $\sum a_n n x^n$ e poiché $\lim n^{1/n} = 1$, dal Lemma 5.19-(iii) e dalla formula di Cauchy-Hadamard per il raggio di convergenza, segue che la serie di potenze in (5.28) ha raggio di convergenza R . Per $x \in I$ la (5.28) segue, ora, dal Lemma con $u_n(x) := a_n(x-x_0)^n$, $E = (-r, r)$ e $|x| < r < R$. ■

Funzioni C^∞ non analitiche [§5.2.3]

Nel testo abbiamo visto che la funzione

$$\varphi(x) := \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$

è $C^\infty(\mathbb{R})$ e ha tutte le derivate nulle in $x = 0$. Questo implica che non è analitica in 0: se lo fosse, sarebbe identicamente nulla in un intervallo $(-\delta, \delta)$, mentre $\varphi(x) > 0$ per ogni $x > 0$. Si osservi che, in questo esempio, la serie di Taylor di φ in 0 è identicamente nulla e ha dunque raggio di convergenza infinito. La mancata analiticità non dipende quindi dalla crescita dei coefficienti, ma dal fatto che φ non coincide con la propria serie di Taylor in alcun intorno di 0.

Diamo ora un esempio di una funzione $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ la cui serie di Taylor in 0 ha raggio di convergenza nullo e che, pertanto, non è analitica in 0. Sia

$$\psi(x) := \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} \cos(nx).$$

⁷ Chiaramente, $\{r > 0 \mid \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < +\infty\} = \{r > 0 \mid \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^{n-1} < +\infty\}$.

Poiché, per ogni $m \in \mathbb{N}_0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}} n^m < +\infty,$$

dal Lemma di Weierstrass (cfr. il commento “*Sulla regolarità delle serie di potenze*” al §5.2.2) segue che $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Inoltre è facile verificare che i coefficienti della serie di Taylor in 0, $a_k = \psi^{(k)}(0)/k!$, sono dati da

$$a_{2k+1} = 0, \quad a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\sqrt{j}} j^{2k}.$$

Per $k \geq 1$, considerando nella somma il termine $j = k^2$, si ottiene

$$|a_{2k}| > \frac{e^{-k} k^{4k}}{(2k)!} \stackrel{(2.23)}{\geq} \left(\frac{e}{4}\right)^k \frac{k^{2k}}{\sqrt{2e} k}.$$

Pertanto

$$|a_{2k}|^{1/(2k)} > \frac{\sqrt{e}}{2} \frac{k}{(2e k)^{1/(4k)}} \longrightarrow +\infty.$$

Ne segue che

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = +\infty;$$

per la caratterizzazione (*) nel commento “*Una caratterizzazione di raggio di convergenza positivo*” al §5.2.1, la serie di Taylor di ψ in 0 ha quindi raggio di convergenza nullo.

Serie di Taylor–Maclaurin della tangente [§5.2.3]

In questa nota dimostriamo che la tangente è analitica in 0, che la sua serie di Taylor–Maclaurin ha raggio di convergenza⁸ $R \geq 1$ e diamo una semplice formula ricorsiva per calcolarne i coefficienti.

Poniamo $c_0 := 1$ e definiamo ricorsivamente

$$c_n := \frac{1}{2n+1} \sum_{j=0}^{n-1} c_j c_{n-1-j}, \quad n \geq 1, \quad (c_0 := 1). \quad (*)$$

Si ha $0 < c_n \leq 1$ per ogni n : infatti, se ciò vale per gli indici minori di n , da (*) segue

$$0 < c_n \leq \frac{n}{2n+1} < 1.$$

La serie di potenze

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n+1}$$

⁸In effetti, usando metodi meno elementari, si può dimostrare che il raggio di convergenza della serie di Maclaurin della tangente è $\pi/2$.

ha dunque raggio di convergenza $R \geq 1$. Derivando termine a termine e usando (*) si ottiene⁹

$$f'(x) = 1 + f(x)^2, \quad (\forall |x| < 1), \quad f(0) = 0.$$

Anche la funzione $x \mapsto \tan x$ soddisfa lo stesso problema di Cauchy¹⁰; per l'unicità della soluzione segue quindi che

$$\tan x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n+1}, \quad |x| < 1.$$

La ricorrenza dà, in particolare,

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \dots$$

Algebra dei limiti in $\mathbb{C}$ [§5.2.4]

Come nel campo reale, anche nel campo complesso vale l'algebra dei limiti:

Se $z_n, w_n \in \mathbb{C}$, $z_n \rightarrow z_0$, $w_n \rightarrow w_0$, allora per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ si ha¹¹

$$\alpha z_n + \beta w_n \rightarrow \alpha z_0 + \beta w_0; \quad z_n w_n \rightarrow z_0 w_0; \quad \frac{1}{z_n} \rightarrow \frac{1}{z_0} \quad (z_0 \neq 0).$$

Le dimostrazioni sono del tutto simili al caso reale (e seguono da questo): ad esempio,

$$|(\alpha z_n + \beta w_n) - (\alpha z_0 + \beta w_0)| \leq |\alpha| |z_n - z_0| + |\beta| |w_n - w_0| \rightarrow 0,$$

dove il limite segue dal caso reale. Per il prodotto, si osservi che se $z_n \rightarrow z_0$ allora $\{z_n\}$ è limitata (ossia $\sup_n |z_n| < +\infty$), ecc.

Teorema di addizione per l'esponenziale complesso [§5.2.4]

Nel §5.2.4 abbiamo definito l'esponenziale complesso tramite la serie (assolutamente convergente su $\mathbb{C}$)

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

In questo *commento* dimostriamo – in modo diretto e indipendente dalla discussione nel §5.2.4 – il fondamentale *teorema di addizione per l'esponenziale complesso*, che asserisce che

$$\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w), \quad \forall z, w \in \mathbb{C}. \quad (*)$$

$${}^9 f(x)^2 = \left(\sum_{j \geq 0} c_j x^{2j+1} \right) \left(\sum_{k \geq 0} c_k x^{2k+1} \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_j c_k x^{2(j+k+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \sum_{\substack{j,k \geq 0 \\ j+k=n-1}} c_j c_k = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \sum_{j=0}^{n-1} c_j c_{n-j-1}$$

$$\stackrel{(*)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} c_n (2n+1) x^{2n} = f' - 1.$$

¹⁰ $y' = 1 + y^2$ è un'equazione differenziale a variabili separabili e ha quindi un'unica soluzione del problema di Cauchy con "dato iniziale" $y(0) = 0$; cfr. §4.6.1 *Equazioni a variabili separabili*, p. 164.

¹¹ Si noti che se $z_n \rightarrow z_0 \neq 0$, allora $z_n \neq 0$ definitivamente.

Ricordiamo che in §2.7.1 e §5.2.3 è stato dimostrato, rispettivamente, che

$$e^{x+y} = e^x e^y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}; \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (**)$$

Dunque, il teorema di addizione (*) vale per $z, w \in \mathbb{R}$. Per l'estensione a $\mathbb{C}$, faremo uso del seguente

Lemma algebrico Per ogni $N \geq 1$ e per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ si ha

$$\sum_{n=0}^N \frac{(z+w)^n}{n!} = \left(\sum_{k=0}^N \frac{z^k}{k!} \right) \left(\sum_{j=0}^N \frac{w^j}{j!} \right) - \varepsilon_N, \quad (\dagger)$$

dove

$$\varepsilon_N = \varepsilon_N(z, w) := \sum_{k=1}^N \sum_{j=N-k+1}^N \frac{z^k}{k!} \frac{w^j}{j!}.$$

Dimostrazione Dalla formula del binomio di Newton¹²,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \frac{(z+w)^n}{n!} &= \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} \\ &= \sum_{0 \leq k \leq n \leq N} \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} \\ &= \sum_{k=0}^N \sum_{n=k}^N \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} \\ &= \sum_{k=0}^N \frac{z^k}{k!} \sum_{j=0}^{N-k} \frac{w^j}{j!} \\ &= \sum_{k=0}^N \frac{z^k}{k!} \left(\sum_{j=0}^N \frac{w^j}{j!} - \sum_{j=N-k+1}^N \frac{w^j}{j!} \right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^N \frac{z^k}{k!} \right) \left(\sum_{j=0}^N \frac{w^j}{j!} \right) - \sum_{k=1}^N \frac{z^k}{k!} \sum_{j=N-k+1}^N \frac{w^j}{j!} \\ &= \left(\sum_{k=0}^N \frac{z^k}{k!} \right) \left(\sum_{j=0}^N \frac{w^j}{j!} \right) - \varepsilon_N. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Dimostrazione di (*) Dalla definizione di $\varepsilon_N(z, w)$ segue che

$$|\varepsilon_N(z, w)| \leq \varepsilon_N(|z|, |w|), \quad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

¹²Nelle identità che seguono usiamo la convenzione che $\sum_{j=m}^n a_j = 0$ se $m > n$; cfr. penultima uguaglianza nel caso $k = 0$.

Da $(**)$ e da $(\dagger)$, con $z = x$ e $w = y$, segue che

$$\varepsilon_N(x, y) \longrightarrow 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Da questa osservazione e da $(\dagger)$ segue che

$$\left| \sum_{n=0}^N \frac{(z+w)^n}{n!} - \left(\sum_{k=0}^N \frac{z^k}{k!} \right) \left(\sum_{j=0}^N \frac{w^j}{j!} \right) \right| = |\varepsilon_N(z, w)| \leq \varepsilon_N(|z|, |w|) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

poiché il membro a sinistra converge a $|\exp(z+w) - \exp(z) \exp(w)|$ il teorema di addizione $(*)$ è dimostrato. ■

Interno, chiusura e frontiera: semplici relazioni [§6.1.2]

Dato un insieme $E \subseteq \mathbb{R}$, l'interno $\overset{\circ}{E}$ è il più grande aperto contenuto in E , mentre la chiusura $\overline{E}$ è il più piccolo insieme chiuso che contiene E , il che equivale a dire

$$\overset{\circ}{E} = \bigcup_{\substack{A \text{ aperto} \\ A \subseteq E}} A, \quad \overline{E} = \bigcap_{\substack{C \text{ chiuso} \\ E \subseteq C}} C.$$

Da queste relazioni segue che

$$(\overset{\circ}{E})^c = \left(\bigcup_{\substack{A \text{ aperto} \\ A \subseteq E}} A \right)^c = \bigcap_{\substack{A \text{ aperto} \\ E^c \subseteq A^c}} A^c = \bigcap_{\substack{C \text{ chiuso} \\ E^c \subseteq C}} C = \overline{E^c}.$$

Da questa relazione segue poi¹³

$$\partial E := \overline{E} \setminus \overset{\circ}{E} = \overline{E} \cap (\overset{\circ}{E})^c = \overline{E} \cap \overline{E^c}.$$

Riassumendo, per ogni insieme $E \subseteq \mathbb{R}$, si ha

$$(\overset{\circ}{E})^c = \overline{E^c}, \quad \partial E = \overline{E} \cap \overline{E^c}.$$

Una dimostrazione immediata di Bolzano–Weierstrass [§6.2.1]

Una formulazione standard del teorema di Bolzano–Weierstrass asserisce che *da una successione limitata in $\mathbb{R}$ è possibile estrarre una sottosuccessione convergente* e, nel testo, ne abbiamo dato una dimostrazione classica basata sul metodo di bisezione. Vi è, però, una dimostrazione immediata usando il concetto di massimo limite e la proprietà che *da ogni successione $\{a_n\}$ è possibile estrarre una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ che abbia come limite $\overline{\lim} a_n$* (cfr. Proposizione 6.21–(i)): *da quest'ultima affermazione segue immediatamente il teorema di Bolzano–Weierstrass*¹⁴.

¹³Questo è l'enunciato della Proposizione 6.9.

¹⁴Ovviamente, se $\{a_n\}$ è limitata, $\overline{\lim} a_n \in \mathbb{R}$.