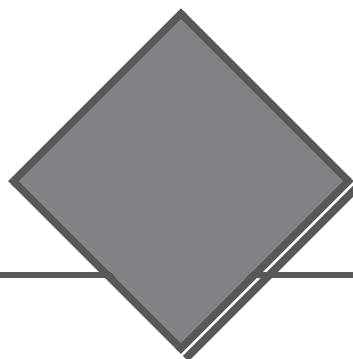


Soluzioni degli esercizi



1 Esercizi del Capitolo 1: Nozioni preliminari

Esercizio 1.1 $A \cap B = \{2, 4, 6\}$; $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $B \setminus C = \{2, 4, 8\}$; $C \setminus B = \{3, 7\}$; $A \times C = \{(1, 3), (1, 6), (1, 7), (2, 3), (2, 6), (2, 7), (4, 3), (4, 6), (4, 7), (5, 3), (5, 6), (5, 7), (6, 3), (6, 6), (6, 7)\}$; $(A \cup B) \cap C = \{6\}$.

Esercizio 1.2 $A \cap B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $A \setminus B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $\mathbb{N} \setminus B$ è l'insieme dei naturali pari, $\mathbb{N} \setminus (A \cap B) = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 14, \dots\}$.

Esercizio 1.3 $A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6), (7, 2), (7, 4), (7, 6)\}$; $B \times A = \{(2, 1), (4, 1), (6, 1), (2, 5), (4, 5), (6, 5), (2, 6), (4, 6), (6, 6), (2, 7), (4, 7), (6, 7)\}$.

Esercizio 1.5 12.

Esercizio 1.9 Se f è bigettiva, basta prendere $g_1 = g_2 = f^{-1}$ per ottenere le funzioni cercate. Se esistono $g_1, g_2 : B \rightarrow A$ tali che $f \circ g_1 = \text{id}_B$ e $g_2 \circ f = \text{id}_A$, la prima uguaglianza implica che f è surgettiva, la seconda che f è iniettiva e quindi f è bigettiva. Inoltre $g_1 = \text{id}_A \circ g_1 = (g_2 \circ f) \circ g_1 = g_2 \circ (f \circ g_1) = g_2 \circ \text{id}_B = g_2$, il che prova che $g_1 = g_2$.

Esercizio 1.10 Se $a_1 \in A_1$, allora $a_1 \in A_1 \cup A_2$, quindi $f(a_1) \in f(A_1 \cup A_2)$; lo stesso accade per ogni $a_2 \in A_2$ e quindi $f(A_1) \cup f(A_2) \subseteq f(A_1 \cup A_2)$. Se $b \in f(A_1 \cup A_2)$, allora esiste $a \in A_1 \cup A_2$ tale che $b = f(a)$; se $a \in A_1$, allora $b \in f(A_1)$, se $a \in A_2$, allora $b \in f(A_2)$, quindi $b \in f(A_1) \cup f(A_2)$, da cui $f(A_1 \cup A_2) \subseteq f(A_1) \cup f(A_2)$, il che prova l'uguaglianza. Se $a \in A_1 \cap A_2$, allora $a \in A_1$ e $a \in A_2$, quindi $f(a) \in f(A_1)$ e $f(a) \in f(A_2)$, da cui $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, se $A_1 = (-\infty, 0]$ e $A_2 = [0, +\infty)$ allora $A_1 \cap A_2 = \{0\}$ e $f(A_1 \cap A_2) = \{0\}$, mentre $f(A_1) = f(A_2) = [0, +\infty)$ e quindi $f(A_1) \cap f(A_2) = [0, +\infty) \neq f(A_1 \cap A_2)$.

Esercizio 1.11 Dall'esercizio precedente sappiamo che $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$. Preso $b \in f(A_1) \cap f(A_2)$, esistono $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$ tali che $b = f(a_1)$ e $b = f(a_2)$. Essendo f iniettiva, poiché $f(a_1) = f(a_2)$ si ha $a_1 = a_2$ e quindi $a_1 \in A_1 \cap A_2$, per cui $b \in f(A_1 \cap A_2)$, il che prova che se f è iniettiva vale anche l'inclusione $f(A_1) \cap f(A_2) \subseteq f(A_1 \cap A_2)$ e quindi l'uguaglianza $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

Esercizio 1.12 Se $b \in f(A_1) \setminus f(A_2)$, poiché $b \in f(A_1)$ esiste $a_1 \in A_1$ tale che $b = f(a_1)$. Inoltre $a_1 \notin A_2$, perché altrimenti si avrebbe $b \in f(A_2)$; pertanto $b = f(a_1)$ con $a_1 \in A_1 \setminus A_2$. Se $A = B = \mathbb{R}$, $A_1 = [-2, +\infty)$, $A_2 = (-\infty, -1]$, $f(x) = x^2$ allora $f(A_1) = [0, +\infty)$, $f(A_2) = [1, +\infty)$, $f(A_1) \setminus f(A_2) = [0, 1)$ e $f(A_1 \setminus A_2) = [0, +\infty)$.

Esercizio 1.14 Dato $a_1 \in A_1$, allora $f(a_1) \in f(A_1)$ e quindi per definizione $a_1 \in f^{-1}(f(A_1))$. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, preso $A_1 = \{2\}$ abbiamo $f(A_1) = \{4\}$ e $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1)) = \{-2, 2\}$.

Esercizio 1.15 Dato $a_1 \in f^{-1}(B_1)$, allora $f(a_1) \in B_1$, quindi per definizione $f(f^{-1}(B_1)) \subseteq B_1$. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, preso $B_1 = \{-1\}$ abbiamo $f^{-1}(B_1) = \emptyset$ e $\emptyset = f(f^{-1}(B_1)) \subseteq B_1$.

Esercizio 1.16 È iniettivo se e solo se è surgettivo se e solo se $a = 0$ e $b \neq 0$, indipendentemente dai valori di c .

Esercizio 1.17 Se $f(x_1) = f(x_2)$ con $x_1 \neq x_2$ allora

$$g \circ f(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = g \circ f(x_2)$$

e quindi $g \circ f$ non sarebbe iniettiva. Se $A = B = C = \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, $g(x) = x^2$ hai che f e $g \circ f$ sono iniettive, mentre g non lo è.

2 Soluzioni degli esercizi

Esercizio 1.18 Poiché $g \circ f$ è surgettiva, dato $c \in C$ esiste $a \in A$ tale che $c = (g \circ f)(a) = g(f(a))$; basta quindi prendere $b = f(a)$ per provare che g è surgettiva. Consideriamo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ data da $g(x) = |x|$; allora $g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ è data da $(g \circ f)(x) = |x^2| = x^2$ è surgettiva, così come g , mentre f non lo è.

Esercizio 1.19 Non sono iniettive $b)$ ed $e)$, in quanto in entrambi i casi $f(1) = f(-1)$; le altre tre sono iniettive.

Esercizio 1.20

- (a) $f \circ g(x) = 32x^6 - 6 - x^3 + 28$, $g \circ f(x) = 32x^6 - 144x^5 + 264x^4 - 252x^3 + 132x^2 - 36x + 1$; per entrambe il dominio è $\mathbb{R}$;
- (b) $f \circ g(x) = x^6 - 3x^5 - 3x^4 + 11x^3 + 6x^2 - 12x - 12$, $g \circ f(x) = x^6 - 9x^3 + 22$; per entrambe il dominio è $\mathbb{R}$;
- (c) $f \circ g(x) = 9x^6 - 18x^4 + 9x^2 - 2$, $g \circ f(x) = 3x^6 - 18x^4 + 33x^2 - 18$; per entrambe il dominio è $\mathbb{R}$;
- (d) $f \circ g(x) = \frac{1}{x^2}$, $g \circ f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 = f \circ g(x)$; per entrambe il dominio è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- (e) $f \circ g(x) = \frac{1}{x^2 - 6x + 10}$, $g \circ f(x) = -\frac{3x^2 + 2}{x^2 + 1}$; per entrambe il dominio è $\mathbb{R}$;
- (f) $f \circ g(x) = \frac{1}{x^4 + 4x^2 + 4}$, $g \circ f(x) = \frac{2x^4 + 1}{x^4}$; il dominio di $f \circ g$ è $\mathbb{R}$, quello di $g \circ f$ è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- (g) $f \circ g(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$, $g \circ f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$; il dominio di $f \circ g$ è $(-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$, quello di $g \circ f$ è $[0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Esercizio 1.21

- (a) È falso perché se $x = 2$ si ha che $x \in \mathbb{N}$ e $P(2)$ è falsa perché $2 + 2 = 4 < 10$.
- (b) È vero perché se $x = 9$ si ha che $x \in \mathbb{N}$ e $P(9)$ è vera perché $9 + 2 = 11 > 10$.
- (c) Ad esempio $A = \{9; 12; 17\}$.
- (d) Ad esempio $B = \{2; 6; 11\}$.

Esercizio 1.23 Tutti i bambini delle scuole materne non credono a Babbo Natale.

Esercizio 1.24 Domani piove e non dormo fino a tardi.

Esercizio 1.25 Per la prima affermazione ogni giorno della settimana devi controllare che Leonardo non stia sveglio tutto il giorno, cioè devi trovare almeno un minuto in cui dorme. Per la seconda devi controllare che ogni giorno della settimana ci sia almeno un minuto in cui Jacopo non studia. Per l'ultima devi controllare se c'è almeno un giorno in cui Niccolò si sveglia presto ma non ha fame prima di mezzogiorno: in caso affermativo la frase proposta è falsa, altrimenti è vera.

Esercizio 1.26 Sono vere $b)$, $c)$, $f)$. La risposta a 1. è $b)$, la risposta a 2. è $f)$.

Esercizio 1.30

- (a) È falso: basta considerare la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2$ per ogni x reale. Presi $x_1 = -2$ e $x_2 = 1$ si ha $x_1 < x_2$ mentre $f(x_1) = (-2)^2 = 4 < 1 = f(x_2)$.
- (b) La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = -x$ soddisfa la condizione richiesta, infatti $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) = -x_1 > -x_2 = f(x_2)$.

Esercizio 1.33 Prima di tutto osserviamo che la restrizione della somma e del prodotto definiti sui numeri reali a $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ mandano questo insieme in sé: infatti dati $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ si ha che

$$(a + b\sqrt{3}) + (c + d\sqrt{3}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}),$$
$$(a + b\sqrt{3})(c + d\sqrt{3}) = (ac + 3bd) + (ad + bc)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}).$$

La restrizione della somma e del prodotto a $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ sono associative e commutative e vale la proprietà distributiva perché vale su $\mathbb{R}$ che contiene $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Inoltre $0 = 0 + 0\sqrt{3}$, $1 = 1 + 0\sqrt{3}$ appartengono a $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ svolgono il ruolo di elemento neutro della somma e del prodotto rispettivamente; $-a + (-b)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ è l'opposto di $a + b\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ e l'inverso di $a + b\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \setminus \{0\}$ è dato da $\frac{a}{a^2 - 3b^2} + \frac{-b}{a^2 - 3b^2}\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ perché $-a$, $-b$, $\frac{a}{a^2 - 3b^2}$ e $\frac{-b}{a^2 - 3b^2}$ sono numeri razionali se a e b lo sono (e nel terzo e quarto caso a e b non sono entrambi nulli). L'insieme $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ è quindi dotato di opposto per ogni elemento e di inverso per ogni elemento non nullo ed è pertanto un campo.

2 Esercizi del Capitolo 2: Vettori geometrici

Esercizio 2.6 Poiché $\vec{i} = 1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j}$ si ha $F_B(\vec{i}) = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$; analogamente $\vec{j} = 0 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j}$ implica $F_B(\vec{j}) = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$.

Esercizio 2.7 $F_B(\overrightarrow{OD_1}) = \begin{vmatrix} -1 \\ 5 \end{vmatrix}$; $F_B(\overrightarrow{OD_2}) = \begin{vmatrix} 7 \\ 7 \end{vmatrix}$.

Esercizio 2.8 Grazie alle proprietà della somma e del prodotto per scalare abbiamo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD_1} &= \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = (\vec{i} - 4\vec{j}) + 2(-2\vec{i} - \vec{j}) + 3(\vec{i} + 2\vec{j}) \\ &= \vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{j} + 6\vec{j} = (1 - 4 + 3)\vec{i} + (-4 - 2 + 6)\vec{j} = 0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} = \overrightarrow{OO}.\end{aligned}$$

Ragionando nello stesso modo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD_2} &= \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = (\vec{i} - 4\vec{j}) - 2(-2\vec{i} - \vec{j}) + (\vec{i} + 2\vec{j}) \\ &= \vec{i} + 4\vec{i} + \vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{j} + 2\vec{j} = 6\vec{i} + 0 \cdot \vec{j} = 6\vec{i}\end{aligned}$$

è un multiplo di $\vec{i}$.

Esercizio 2.9 Siccome

$$\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + a\overrightarrow{OC} = 3(\vec{i} + 7\vec{j}) + (3\vec{i} + 5\vec{j}) + a(2\vec{i} - \vec{j}) = (6 + 2a)\vec{i} + (26 - a)\vec{j},$$

tale vettore è un multiplo di $\vec{j}$ se e solo se $6 + 2a = 0$, ovvero $a = -3$.

Esercizio 2.10 $a = 20$.

Esercizio 2.11 Se $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ fossero proporzionali, dovrebbe esistere $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\overrightarrow{OB} = \alpha \overrightarrow{OA}$, cioè $-2\vec{i} + \vec{j} = \alpha(2\vec{i} + 3\vec{j})$, il che implica $\alpha = -1$ e $3\alpha = 1$, il che è chiaramente impossibile. Inol-

tre l'uguaglianza $\overrightarrow{OC} = \vec{i} + \vec{j} = x_1(2\vec{i} + 3\vec{j}) + x_2(-2\vec{i} + \vec{j})$ equivale al sistema $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 1, \\ 3x_1 + x_2 = 1, \end{cases}$

la cui soluzione è $x_1 = \frac{3}{8}$, $x_2 = -\frac{1}{8}$ e pertanto $F_{B'}(\overrightarrow{OC}) = \begin{vmatrix} 3/8 \\ -1/8 \end{vmatrix}$.

Esercizio 2.12 Non sono proporzionali per $a \neq -2$. Per questi valori di a si ha

$$F_{B_a}(\overrightarrow{OC}) = \begin{vmatrix} \frac{3}{a+2} \\ \frac{a-4}{a+2} \end{vmatrix}.$$

Esercizio 2.13 $F_B(\overrightarrow{OD_1}) = F_B(\overrightarrow{OA}) - F_B(\overrightarrow{OB}) - 2F_B(\overrightarrow{OC}) = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{vmatrix};$

analogamente si trova $F_B(\overrightarrow{OD_2}) = \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{vmatrix}$.

Esercizio 2.14 Una base di $\mathcal{V}_O^3$ deve contenere 3 vettori non complanari, basta quindi verificare che i tre vettori assegnati non appartengono allo stesso piano. Se ne esistesse uno che li contiene tutti e tre, dato che $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ sono non nulli, dovremmo poter scrivere $\overrightarrow{OC}$ come somma di un multiplo di $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, esisterebbero quindi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che $x_1\overrightarrow{OA} + x_2\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$, ovvero $x_1(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) + x_2(2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) = -4\vec{i} - 3\vec{j}$. Questa uguaglianza equivale al sistema di equazioni

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -4, \\ x_1 + x_2 = -3, \\ -x_1 - x_2 = 0; \end{cases} \quad \text{essendo tale sistema impossibile, i tre vettori assegnati sono una base di } \mathcal{V}_O^3.$$

Esercizio 2.15 $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$, quindi $\overrightarrow{OC}$ appartiene al piano generato da $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

Esercizio 2.16 $a = 4$.

4 Soluzioni degli esercizi

Esercizio 2.17 Le due rette si intersecano nel punto $\begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{vmatrix}$, che si ottiene per $t = 1$ e $t' = -2$.

Esercizio 2.18 Il sistema $\begin{cases} 2t - 1 = 1 - t' \\ 2t + 1 = 3 - t' \\ 4t - 1 = 3 - 2t' \end{cases}$ ha le infinite soluzioni $t' = 2 - 2t$, quindi le rette sono coincidenti.

Esercizio 2.19 Il piano π ha equazione cartesiana $x - y + z = 0$; sostituendo le equazioni parametriche della retta trovi $t - 2 - (3t - 1) + 2t + 1 = 0$ che è un'identità, quindi la retta giace nel piano.

Esercizio 2.21 Il piano π ha equazione cartesiana $3x - 3y + z = 0$; sostituendo le coordinate dei due punti ottieni nel primo caso $3 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 3 = 0$ mentre nel secondo $3 \cdot 1 - 3(-2) + 3 \neq 0$; quindi il primo punto appartiene a π , mentre il secondo no.

Esercizio 2.22 $a = 15$.

Esercizio 2.24 La retta r_a ha equazione cartesiana $y + 1 = a(x - 2)$ ovvero $y = ax - 2a - 1$, pertanto $O \in r_a$ se e solo se $a = -\frac{1}{2}$.

Esercizio 2.25 La retta r ha equazione parametrica $\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = e + 2et, \\ z = \sqrt{2} + (\sqrt{2} + \sqrt{3})t; \end{cases}$ quindi $\begin{vmatrix} 3 \\ -e \\ -\sqrt{3} \end{vmatrix}$ sta in r perché corrisponde al valore $t = -1$.

Esercizio 2.27 Il sistema $\begin{cases} 1 + 3t = -1 + t' \\ 2 + t = -1 + 2t' \end{cases}$ ha soluzione $t = -\frac{1}{5}$, $t' = \frac{7}{5}$ che corrisponde al punto $\begin{vmatrix} 2 \\ 9 \\ 5 \end{vmatrix}$.

Esercizio 2.28 La prima retta ha equazione cartesiana $y = 1$, la seconda $y = 2x - 2$; il punto di intersezione è $\begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$.

Esercizio 2.30 Le equazioni parametriche della prima e della seconda retta sono rispettivamente $\begin{cases} x = 3 - 2t, \\ y = t, \\ z = 4 - 3t; \end{cases}$ e $\begin{cases} x = t, \\ y = t, \\ z = -3 + 4t; \end{cases}$ l'intersezione è il punto $\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$.

Esercizio 2.31 Le rette r e s_a si intersecano se e solo se $a = -1$, e in tal caso il punto di intersezione è $\begin{vmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{vmatrix}$.

3 Esercizi del Capitolo 3: L'eliminazione di Gauss

Esercizio 3.5 $x = 5, y = 1, z = 2; x_1 = 9, x_2 = 3, x_3 = -1$.

Esercizio 3.6 $x = -2, y = 4, z = 1, w = 3; x_1 = \frac{75}{8}, x_2 = \frac{3}{8}, x_3 = 4, x_4 = 1$.

Esercizio 3.8 Procediamo per induzione su n . Per $n = 0$ il membro sinistro diventa $1 + q$ e il membro destro diventa $(1 - q^2)/(1 - q)$, per cui l'affermazione segue subito dal prodotto notevole $(1 + a)(1 - a) = 1 - a^2$ applicato con $a = q$. Supponiamo allora che l'affermazione sia vera per n , cioè che si abbia

$$(1 + q)(1 + q^2) \cdots (1 + q^{2^n}) = \frac{1 - q^{2^{n+1}}}{1 - q}.$$

Allora

$$\begin{aligned}(1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^{2^{n+1}}) &= [(1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^{2^n})](1+q^{2^{n+1}}) \\ &= \frac{(1-q^{2^{n+1}})}{1-q}(1+q^{2^{n+1}}) = \frac{1-q^{2^{n+2}}}{1-q},\end{aligned}$$

dove abbiamo usato l'ipotesi induttiva nella seconda uguaglianza, e lo stesso prodotto notevole di prima applicato con $a = q^{2^{n+1}}$ nella terza uguaglianza. Dunque la nostra affermazione è vera per $n = 0$, e se è vera per n è vera anche per $n + 1$; per il principio di induzione, la nostra affermazione è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 3.9 Per $n = 1$ si ha che $\frac{1}{1-2} = \frac{1}{1+1}$, quindi il passo iniziale è verificato. Se l'uguaglianza è vera per n , allora

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} &= \frac{n}{n+1} \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} \\ &= \frac{n(n+2)+1}{(n+1) \cdot (n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1) \cdot (n+2)} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{(n+1)+1}\end{aligned}$$

che è proprio l'uguaglianza data per $n + 1$.

Esercizio 3.10 $x = 1, y = 2; x_1 = 3, x_2 = 7; \alpha = -3, \beta = 4$.

Esercizio 3.11 $x = 0, y = 1, z = 2$; non ammette soluzioni.

Esercizio 3.12 $x = t, y = 3 - t, z = 2t - 1; x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 4$.

Esercizio 3.13 Il primo sistema ammette come unica soluzione $\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix}$. Il secondo si-

stema ammette come unica soluzione $\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$. Il terzo sistema ammette come unica soluzione

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4/5 \\ -1/2 \\ 3/4 \end{vmatrix}.$$

Esercizio 3.14 $x = 1, y = 0, z = 3, w = 1$; non ammette soluzioni.

Esercizio 3.15 Il primo sistema ammette come unica soluzione $\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1/18 \\ 1/18 \\ -2/9 \\ 0 \end{vmatrix}$. Il secon-

do sistema ammette come unica soluzione $\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4/5 \\ -1/2 \\ 3/4 \end{vmatrix}$. Il terzo sistema ammette come unica

soluzione $\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/3 \\ 1/2 \\ 1/6 \\ 0 \end{vmatrix}.$

Esercizio 3.16 $x = \frac{6}{5}, y = -\frac{4}{5}, z = -\frac{108}{25}, t = 1; x = \frac{13}{12}, y = -\frac{11}{12}, z = -\frac{157}{36}, t = \frac{11}{12}; x = \frac{9}{10}, y = -\frac{11}{10}, z = -\frac{51}{10}, t = \frac{11}{10}.$

Esercizio 3.17 $x = \frac{1-k}{k^2+1}, y = \frac{k+1}{k^2+1}$; per $k = 1$ non ammette soluzioni, per $k = -1$ $x_1 = t$ e $x_2 = t + 1$, per $k \neq \pm 1$ $x_1 = \frac{2k}{k-1}, x_2 = \frac{k-3}{k-1}; \alpha = -k^2, \beta = k^2 - k + 1.$

Esercizio 3.18 Il primo sistema per $k \neq 0, \pm 2$ ha come unica soluzione $\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$; per $k = 0$

il sistema ha una retta di soluzioni, di equazioni parametriche $\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = t; \end{cases}$ per $k = 2$ il sistema

6 Soluzioni degli esercizi

ha una retta di soluzioni, di equazioni parametriche $\begin{cases} x_1 = t, \\ x_2 = 1 - t, \\ x_3 = t; \end{cases}$ per $k = -2$ il sistema ha

una retta di soluzioni, di equazioni parametriche $\begin{cases} x_1 = 2 - t, \\ x_2 = 1 - t, \\ x_3 = t. \end{cases}$ Il secondo sistema per $k \neq -\frac{4}{3}$,

1 ha come unica soluzione $\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 21/(3k+4) \\ -19/(6k+8) \\ 33/(3k+4) \end{vmatrix}$; per $k = -4/3$ non ammette soluzioni; per

$k = 1$ ha una retta di soluzioni, di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 3, \\ y = 1 - \frac{1}{2}t, \\ z = t. \end{cases}$ Il terzo sistema per

$k \neq 1$ non ammette soluzioni, mentre per $k = 1$ ha una retta di soluzioni, di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 1 - t, \\ z = t. \end{cases}$

Esercizio 3.19 Per $k \neq 0, 1$ il sistema ha come unica soluzione $\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{k} + 5 - \frac{5}{2}k - k^2 \\ k - \frac{1}{2} \\ -3 - \frac{1}{k} \\ k + 1 \end{vmatrix}$; per

$k = 0$ il sistema non ammette soluzioni; per $k = 1$ il sistema ha una retta di soluzioni, di equazioni parametriche $\begin{cases} x = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}t, \\ y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t, \\ z = 2 - 3t, \\ w = t. \end{cases}$

Esercizio 3.20 Se $a = 4$ oppure $a = -\frac{1}{4}$ e $b \neq \frac{56}{17}$ non ammette soluzione; se $a = -\frac{1}{4}$ e $b = \frac{56}{17}$, ci sono le infinite soluzioni $x = t, y = -\frac{4}{255}(34t - 31), z = -\frac{4}{255}(17t + 7)$; se $a \neq 4$ e $a \neq -\frac{1}{4}$ l'unica soluzione è $x = \frac{a^2b+6a-16b+54}{4a^2-15a-4}, y = -\frac{2ab+4a-8b+29}{4a^2-15a-4}, z = -\frac{ab-4a-4b+13}{4a^2-15a-4}$. Se $a \neq 1$ non ammette soluzioni; se $a = 1$ ci sono le infinite soluzioni $x = t, y = \frac{t+1}{2}, z = \frac{1-t}{2}$. Se $a + b - c \neq 0$ non ammette soluzioni, se $c = a + b$ ci sono le infinite soluzioni $x = t, y = a - 2t, z = b - 2t$.

Esercizio 3.21 $\begin{cases} x = 1, \\ y = 0, \\ kz = k. \end{cases}$

Esercizio 3.22 La prima matrice è singolare, mentre la seconda non lo è.

Esercizio 3.23 Entrambe non singolari.

Esercizio 3.24 I pivot della prima matrice valgono 1, -1, 5; quelli della seconda 2, $\frac{7}{2}$, -8.

Esercizio 3.25 I pivot valgono 1, 3 e 9 senza alcuno scambio; 1, 3 e -9 scambiando seconda e terza riga; 2, $-\frac{3}{2}$ e 9 scambiando prima e seconda riga; 2, 2 e $\frac{9}{2}$ scambiando inizialmente prima e seconda riga e poi seconda e terza riga. Il valore assoluto del prodotto è sempre uguale a 27; gli scambi di righe che danno come prodotto dei pivot l'opposto di quello ottenuto effettuando un'eliminazione senza scambi di righe sono quelli in cui si scambia la prima riga con la seconda oppure la seconda con la terza.

Esercizio 3.26 Calcolo dei pivot senza scambi di righe:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 9 \\ 2 & 6 & -3 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -13 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -14 \end{vmatrix},$$

per cui i pivot sono $p_1 = 1, p_2 = -2, p_3 = -14$, la loro somma è $p_1 + p_2 + p_3 = -15$ (e il loro prodotto è $p_1 p_2 p_3 = 28$). Calcolo dei pivot scambiando la prima e la terza riga:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 9 & 0 \\ 2 & 6 & -3 & 0 \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 9 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 12 & 0 \\ 0 & -1 & 13/2 & 0 \end{array} \right| \rightarrow \left| \begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 7/2 & 0 \end{array} \right|,$$

per cui i pivot sono $q_1 = 2, q_2 = -4, q_3 = 7/2$, la loro somma è $q_1 + q_2 + q_3 = 3/2$ (e il loro prodotto è $q_1 q_2 q_3 = -28$). In particolare, nei due casi la somma dei pivot è completamente diversa (mentre il prodotto dei pivot è lo stesso cambiato di segno, come previsto in quanto abbiamo effettuato uno scambio di righe).

Esercizio 3.27 Nessun $k \in \mathbb{R}; k = 1$ e $k = 3$.

Esercizio 3.28 $k = \frac{1}{2}; k = 0$.

Esercizio 3.29 $k = -1; k = -\frac{1}{2}$.

Esercizio 3.30 La prima matrice è singolare per $k = 6$. La seconda matrice è singolare per $k = 0, -1 + \sqrt{5}$ e $-1 - \sqrt{5}$.

Esercizio 3.33 Scambiando la prima e la terza riga e facendo la riduzione a scala i pivot risultano $-1, 2, -1$, quindi sono tutti non nulli per ogni valore di $\beta \in \mathbb{R}$. Se si sostituisce alla riga A_2 la combinazione lineare $\beta A_2 - A_1$ e alla riga A_3 la combinazione $\beta A_3 + A_1$, per $\beta = 0$ la matrice risulta avere seconda riga uguale a $-A_1$ e terza riga uguale ad A_1 , quindi le righe A_2 e A_3 sono "scomparse" e il sistema ottenuto non è equivalente a quello iniziale, ma al sistema costituito dalla sola equazione $x_3 = 0$ in tre incognite, che ha come soluzioni tutte le terne $(x_1, x_2, 0)$.

4 Esercizi del Capitolo 4: Spazi vettoriali

Esercizio 4.1 Poiché $0 + 0 = 0$, dato $v \in V$ trovi $(0 + 0)v = 0v$. Applicando le proprietà distributive del prodotto per scalari, ottieni $0v + 0v = 0v$, sommando a entrambi i membri $-0v$ ne segue $0v = 0$.

Esercizio 4.3 Se $\lambda = 0$ dall'assioma (7) nella Definizione 4.2 segue che $\lambda v = 0$. Se $v = 0$ sempre dagli assiomi si ottiene $\lambda 0 = \lambda(0 + 0) = \lambda 0 + \lambda 0$ da cui, usando l'assioma (3), segue $\lambda 0 = 0$. Se viceversa $\lambda v = 0$ e $\lambda \neq 0$ allora

$$v = 1 \cdot v = \left(\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda \right) \cdot v = \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda v) = \frac{1}{\lambda} \cdot 0 = 0.$$

Esercizio 4.4 Il fatto che $\{0\}$, le rette per l'origine, i piani per l'origine ed $\mathbb{R}^3$ siano sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ segue immediatamente dal fatto che sono tutti sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}^3$ chiusi per la somma e per il prodotto per scalare. Viceversa, dato un sottospazio vettoriale $U \subseteq \mathbb{R}^3$, allora $\dim U \leq \dim \mathbb{R}^3 = 3$: se U ha dimensione 0 allora non contiene alcun vettore linearmente indipendente e quindi $U = \{0\}$; se $\dim U = 1$ allora $U = \text{Span}(u_1)$ per un vettore non nullo di $\mathbb{R}^3$ e quindi U è una retta per l'origine, se $\dim U = 2$ allora $U = \text{Span}(u_1, u_2)$ per una coppia di vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^3$ e quindi U è un piano per l'origine, infine se $\dim U = 3$, hai che $U = \mathbb{R}^3$.

Esercizio 4.5 $\mathbb{R}_n[t]$ non è vuoto in quanto contiene tutte le costanti che sono i polinomi di grado 0. Poiché il grado della somma di due polinomi è minore o uguale al massimo dei gradi dei due addendi e il grado del prodotto di un polinomio per una costante non nulla è uguale al grado del polinomio stesso, trovi subito che $\mathbb{R}_n[t]$ è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalare e quindi è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[t]$.

Esercizio 4.6 La matrice nulla è diagonale (e anche triangolare superiore e inferiore), quindi nessuno di questi sottoinsiemi dello spazio delle matrici quadrate è vuoto. Le matrici diagonali sono quelle per le quali gli elementi fuori dalla diagonale sono tutti nulli: poiché gli elementi della somma di due matrici si ottengono sommando quelli che occupano lo stesso posto nei due addendi e sommando due addendi nulli (o moltiplicando un numero reale per 0) si ottiene ancora 0, l'insieme delle matrici diagonali è chiuso per la somma e per il prodotto per scalare. Lo stesso ragionamento funziona per le matrici triangolari superiori (o inferiori) per le quali basta controllare cosa accade per gli elementi sopra (o sotto) la diagonale principale.

8 Soluzioni degli esercizi

Esercizio 4.7 Per il polinomio nullo e per quelli di grado 1 con termine noto nullo.

Esercizio 4.8 Se e solo se $c = 0$.

Esercizio 4.9 $X = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in \mathbb{N}\}$ è chiuso rispetto alla somma ma non rispetto al prodotto per scalari; $Y = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \cdot x_2 = 0\}$ è chiuso rispetto al prodotto per scalari ma non rispetto alla somma.

Esercizio 4.15 I vettori delle tre coppie non sono multipli l'uno dell'altro e quindi si tratta in tutti e tre i casi di vettori linearmente indipendenti. Poiché $\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$, la prima coppia di vettori genera $\mathbb{R}^2$; analogamente accade per la seconda in quanto $\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \frac{2}{3}\begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix} - \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 2 \\ 3 \end{vmatrix}$ e per la terza poiché $\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix} - \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix} - \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 \\ -1 \end{vmatrix}$.

Esercizio 4.16 Le coordinate del primo vettore sono rispettivamente $\begin{vmatrix} -2 \\ 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix}$; quelle del secondo $\begin{vmatrix} 3 \\ -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -\frac{8}{3} \\ \frac{7}{3} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$; quelle del terzo $\begin{vmatrix} 14 \\ -21 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -\frac{35}{3} \\ \frac{28}{3} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -7 \\ 0 \end{vmatrix}$; per l'ultimo $\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \end{vmatrix}$.

Esercizio 4.17 Da $\lambda_1 e_1 + \lambda_2(e_1 + e_2) + \lambda_3(e_1 + e_3) = O$ segue $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = O$, da cui $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$ che implica $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ e quindi i vettori di $\mathcal{B}_1$ sono linearmente indipendenti; inoltre sono 3, che è la dimensione di $\mathbb{R}^3$, e quindi sono una base di $\mathbb{R}^3$. I vettori di $\mathcal{B}_2$ non sono una base di $\mathbb{R}^3$ perché sono linearmente dipendenti dato che $1 \cdot (e_1 + e_2) + 1 \cdot (e_1 + 2e_2 + e_3) - 1 \cdot (2e_1 + 3e_2 + e_3) = O$.

Esercizio 4.18 $\begin{vmatrix} -6 \\ 1 \\ 7 \end{vmatrix}$.

Esercizio 4.19 $t \neq \pm 2$.

Esercizio 4.20 Se $ad - bc \neq 0$, le due uguaglianze

$$\frac{d}{ad-bc} \begin{vmatrix} a \\ c \end{vmatrix} - \frac{c}{ad-bc} \begin{vmatrix} b \\ d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad -\frac{b}{ad-bc} \begin{vmatrix} a \\ c \end{vmatrix} + \frac{a}{ad-bc} \begin{vmatrix} b \\ d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

garantiscono che i due vettori sono generatori. Inoltre se uno di essi fosse multiplo dell'altro, si verificherebbe facilmente che $ad - bc = 0$ il che dà una contraddizione, quindi necessariamente i due vettori sono anche linearmente indipendenti, per cui formano una base. Viceversa, supponi che $ad - bc = 0$: se $c = d = 0$ allora i due vettori dati sono linearmente dipendenti perché entrambi multipli di $\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$; se invece almeno uno fra c e d è non nullo, l'uguaglianza $d \begin{vmatrix} a \\ c \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} b \\ d \end{vmatrix}$ garantisce di nuovo che sono multipli l'uno dell'altro e quindi di nuovo non formano una base.

Esercizio 4.21 Da $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = O$ segue $(\lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3)t + (\lambda_2 - \lambda_3)t^2 = O$, da cui $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0$ e $\lambda_2 - \lambda_3 = 0$ che implica $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ e quindi i polinomi dati sono linearmente indipendenti; inoltre sono 3, che è la dimensione di $\mathbb{R}_2[t]$, e quindi

formano una base di $\mathbb{R}_2[t]$. Le coordinate di q_1 rispetto ad essa sono $\begin{vmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{vmatrix}$, quelle di q_2 sono $\begin{vmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{vmatrix}$.

Esercizio 4.26 Dato che $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono un insieme di generatori di V da essi è possibile estrarre una base: se $\{v_1, \dots, v_n\}$ non fossero linearmente indipendenti, la base ottenuta conterebbe un numero di elementi strettamente minore di n , il che è in contrasto con il fatto che tutte le basi di uno spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi. Pertanto $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono anche linearmente indipendenti e quindi formano una base di V .

Esercizio 4.27 Se $\{w_1, \dots, w_p\}$ fosse un sistema di generatori di V potresti estrarre da esso una base, che quindi conterebbe meno di n vettori, contraddicendo il fatto che ogni base di V deve contenere n vettori, in quanto $\dim V = n$.

Esercizio 4.28 Indichiamo con n il numero di variabili: ciascuna equazione individua un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - 1$. Adesso basta notare che, per la formula di Grassmann, aggiungere un'equazione può lasciare invariata la dimensione del sottospazio oppure farla scendere di 1; dato che le equazioni sono in numero minore delle variabili otteniamo un sottospazio vettoriale di dimensione positiva che quindi contiene un elemento non nullo, ovvero una soluzione non banale.

Esercizio 4.29 Se $\mathcal{A}$ è un insieme di generatori di V , allora deve contenere una base, quindi deve avere almeno n elementi e contiene n vettori linearmente indipendenti. Viceversa, se $k \geq n$ e $\mathcal{A}$ contiene n vettori linearmente indipendenti, tale sottoinsieme di $\mathcal{A}$ costituisce una base e quindi in particolare un insieme di generatori; poiché contiene un insieme di generatori, anche $\mathcal{A}$ è un insieme di generatori.

Esercizio 4.30 $\mathbb{K} = \text{Span}(1)$, quindi $\{1\}$ è una base di $\mathbb{K}$ costituita da un elemento, per cui $\dim \mathbb{K} = 1$.

Esercizio 4.31 Se $\mathbb{R}[t]$ avesse un numero finito di generatori, indicato con d il massimo dei loro gradi, non sarebbe possibile scrivere x^{d+1} come loro combinazione lineare perché il grado di una combinazione lineare di polinomi è minore o uguale al massimo dei gradi dei polinomi che vi compaiono.

Esercizio 4.33 Prendendo le dimensioni dei sottospazi $V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n$ si trova che $0 \leq \dim V_0 < \dim V_1 < \dots < \dim V_n \leq n$ e pertanto, essendo le disuguaglianze strette, $\dim V_j = j$ per ogni $j = 0, \dots, n$ e, in particolare $V_0 = \{O\}$ e $V_n = V$. Dato un sottospazio $U \subseteq V$, sia $v_1, \dots, v_k$ una sua base che completiamo a una base $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ di V . Posto $V_0 = \{O\}$ e $V_j = \text{Span}(v_1, \dots, v_j)$ per $j = 1, \dots, n$ si ha che $V_0, \dots, V_n$ è una bandiera per la quale $V_k = U$.

Esercizio 4.35 Se $U \subseteq W$, allora $U \cup W = W$ e quindi è un sottospazio vettoriale, lo stesso accade se $W \subseteq U$. Viceversa, se $U \cup W$ è un sottospazio vettoriale e $U \not\subseteq W$, sia $u_0 \in U \setminus W$. Per ogni $w \in W$, $u_0, w \in U \cup W$, quindi la chiusura per la somma di tale sottospazio implica che $u_0 + w \in U \cup W$. Se $u_0 + w \in U$, per differenza $w \in U$; se invece $u_0 + w \in W$, allora per differenza $u_0 \in W$, il che non è, pertanto $w \in U$ per ogni $w \in W$ e quindi $W \subset U$. Infine, se $U \subseteq W$, si ha che $U \cup W = W$ è un sottospazio contenente sia U sia W , quindi $U + W$ deve essere contenuto in esso perché è il più piccolo sottospazio vettoriale di V contenente U e W , pertanto $U + W = U \cup W = W$ (e analogamente se $W \subseteq U$).

Esercizio 4.37 $B \cup C$ è sempre un insieme di generatori per $U + W$. Inoltre, essendo $U \cap W = \{O\}$, si ha che $B \cap C = \emptyset$ e $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$, quindi la cardinalità di $B \cup C$ coincide con la dimensione di $U + W$, per cui ne è una base. Se $V = \mathbb{R}^3$, $U = \text{Span}(e_1, e_2)$, $W = \text{Span}(e_1, e_3)$, $B = \{e_1, e_2\}$, $C = \{2e_1, e_3\}$, allora $B \cup C = \{e_1, e_2, 2e_1, e_3\}$ non è una base di $U + W$ perché non è costituita da vettori linearmente indipendenti.

Esercizio 4.38 Per esempio $\mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbb{R} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbb{R} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$, e ce ne sono infiniti altri: basta prendere $\mathbb{R}v_1$ dove v_1 non è un multiplo di v_0 .

Esercizio 4.39 Si vede facilmente che i vettori di W hanno tutti prima componente uguale al doppio della terza, quindi l'unico vettore di U che sta anche in W è O , pertanto $U \cap W = \{O\}$. Inoltre $\dim U = 1$ e $\dim W = 2$, da cui $\dim(U \oplus W) = 3$ e dunque $U \oplus W = \mathbb{R}^3$.

Esercizio 4.40 Poiché $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W = \dim V$, si ha $U \oplus W = V$ e quindi W è un supplementare di U in V . Inoltre

$$\dim(U \cap Z) = \dim U + \dim Z - \dim(U + Z) = \dim U + \dim Z - \dim V = 0,$$

quindi $U \cap Z = \{O\}$ e pertanto anche Z è un supplementare di U in V .

Esercizio 4.41 $\rho = 3, \theta = \pi; \rho = 2\pi, \theta = \frac{\pi}{2}; \rho = 4, \theta = \frac{\pi}{6}; \rho = 6\sqrt{2}, \theta = \frac{7}{4}\pi; \rho = 4, \theta = \frac{2}{3}\pi$.

Esercizio 4.42 $-1; 1; -8; -\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$.

Esercizio 4.45 Le quattro radici quarte di 1 sono $1; -1; i; -i$. Le due radici quadrate di $1 - 4i\sqrt{3}$ sono $2 - \sqrt{3}i$ e $-2 + \sqrt{3}i$.

Esercizio 4.46 Poiché $(1+i)(1-i)^{-1} = i$, le sue radici terze hanno tutte modulo 1 e argomento $\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$ e $\frac{3}{2}\pi$.

10 Soluzioni degli esercizi

Esercizio 4.47 Scrivendo $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ l'equazione diventa

$$|z|^4 (\cos(4\theta) + i \sin(4\theta)) = |z|(\cos \theta - i \sin \theta),$$

da cui segue subito che $|z| = 0$ (e quindi $z = 0$) oppure $|z| = 1$. In quest'ultimo caso moltiplicando entrambi i membri per $\cos \theta + i \sin \theta$ otteniamo

$$\cos(5\theta) + i \sin(5\theta) = 1,$$

per cui z è una radice quinta dell'unità, ovvero $z = \cos(2k\pi/5) + i \sin(2k\pi/5)$ con $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Riassumendo, le soluzioni sono $z = 0$ e $z = \cos(2k\pi/5) + i \sin(2k\pi/5)$ con $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Esercizio 4.48 Se $k \neq \pm 1$, l'unica soluzione è $z = 0$; se $k = 1$, le soluzioni sono $z = \rho \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right)$, $z = \rho i$, $z = \rho \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right)$; se $k = -1$, le soluzioni sono $z = \rho \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)$, $z = \rho \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)$, $z = -\rho i$, per ogni $\rho \geq 0$.

Esercizio 4.49 Le radici di $p_1(z)$ sono $z_1 = i$, $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$, $z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$. Per il polinomio $p_2(z) = z^3 - i$ si ha che $p_1 p_2$ è a coefficienti reali.

Esercizio 4.50 Posto $z = x + iy$ e $w = u + iv$, trovi allora $e^z = e^x(\cos x + i \sin x)$, $e^w = e^u(\cos v + i \sin v)$. Grazie alle proprietà dell'esponenziale e alla formula per la somma di seno e coseno, ottieni

$$\begin{aligned} e^z \cdot e^w &= e^x(\cos x + i \sin x) e^u(\cos v + i \sin v) \\ &= e^{x+u}(\cos y \cos v - \sin y \sin v + i(\cos y \sin v + \sin y \cos v)) \\ &= e^{x+u}(\cos(y+v) + i \sin(y+v)) = e^{z+w}. \end{aligned}$$

Inoltre $e^{i\pi} + 1 = e^0(\cos \pi + i \sin \pi) + 1 = 1(-1 + i \cdot 0) + 1 = 0$.

Esercizio 4C.1 $\lambda = \pm 1$, $\lambda = \pm i$.

Esercizio 4C.2 $p(z) = z^5 + z$ ha grado 5 e la sua unica radice reale è $z = 0$, $q(z) = z^4 + 1$ ha grado 4 e non ha radici reali.

Esercizio 4C.3 Sostituendo $r = a/b$ in $p(t)$ e moltiplicando per b^n ottieni

$$a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} b + \cdots + a_0 b^n = 0.$$

Ne segue che

$$a_0 b^n = -a(a_n a^{n-1} + a_{n-1} a^{n-2} b + \cdots + a_1 b^{n-1})$$

e quindi a divide $a_0 b^n$; poiché a e b sono coprimi, allora lo sono anche a e b^n e pertanto a divide a_0 . In maniera analoga ottieni che b divide a_n .

5 Esercizi del Capitolo 5: Applicazioni lineari

Esercizio 5.2

$$T \begin{vmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) \\ x_1 + x_2 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x_1 - y_1 \\ x_1 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2x_2 - y_2 \\ x_2 \\ 0 \end{vmatrix} = T \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{vmatrix} + T \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{vmatrix};$$

$$T \begin{vmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\lambda x - \lambda y \\ \lambda x \\ 0 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 2x - y \\ x \\ 0 \end{vmatrix} = \lambda T \begin{vmatrix} x \\ y \\ 0 \end{vmatrix} \text{ per ogni } x_1, y_1, x_2, y_2, x, y, \lambda \in \mathbb{R}, \text{ quindi } T \text{ è}$$

lineare. $S_1 \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \neq 2S_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$, quindi S_1 non è lineare; non lo è neppure S_2 in quanto

$$S_2 \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Esercizio 5.3 $k = -2$

Esercizio 5.4 $T \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_m + y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.

Esercizio 5.6

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(\alpha A + \beta B) &= (\alpha a_{11} + \beta b_{11}) + \cdots + (\alpha a_{nn} + \beta b_{nn}) \\ &= \alpha(a_{11} + \cdots + a_{nn}) + \beta(b_{11} + \cdots + b_{nn}) = \alpha \operatorname{tr}(A) + \beta \operatorname{tr}(B) \end{aligned}$$

per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$.

Esercizio 5.8 Indicata con $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$, poni $a_j = T(e_j)$ per $j = 1, \dots, n$. Allora $\varphi_a(e_j) = 0 \cdot a_1 + \cdots + 1 \cdot a_j + 0 \cdot a_{j+1} + \cdots = a_j = T(e_j)$ per $j = 1, \dots, n$, quindi le applicazioni lineari T e φ_a assumono lo stesso valore su una base di $\mathbb{R}^n$ e quindi coincidono.

Esercizio 5.9 Considera le applicazioni $L_1, L_2 : M_{n,n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n,n}(\mathbb{R})$ date rispettivamente da $L_1(A) = A - A^T$, $L_2(A) = A + A^T$; grazie all'Esempio 5.10, sia L_1 sia L_2 sono applicazioni lineari. Poiché $\operatorname{Ker} L_1 = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ e $\operatorname{Ker} L_2 = \mathcal{AS}_n(\mathbb{R})$ i due sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali di $M_{n,n}(\mathbb{R})$. Infine $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$ e $\dim \mathcal{AS}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Esercizio 5.10 Data $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ poniamo $A_1 = (A + A^T)/2$ e $A_2 = (A - A^T)/2$. Poiché la trasposizione è un'operazione lineare e $(A^T)^T = A$ per ogni $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, ottieni subito che $A_1 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ e $A_2 \in \mathcal{AS}_n(\mathbb{R})$, quindi $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{AS}_n(\mathbb{R}) = M_{n,n}(\mathbb{R})$. Se $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{AS}_n(\mathbb{R})$ allora $A = A^T = -A$ e quindi $A = 0$, per cui $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{AS}_n(\mathbb{R}) = \{O\}$ e hai finito.

Esercizio 5.11 (a) Dato che $O_W \in W_1$ e $T(O_V) = O_W$, allora $O_V \in T^{-1}(W_1)$ che quindi non è vuoto. Se poi $v_1, v_2 \in T^{-1}(W_1)$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, allora $T(v_1), T(v_2) \in W_1$ e quindi $T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) \in W_1$ perché W_1 è un sottospazio vettoriale di W , pertanto $T^{-1}(W_1)$ è chiuso per combinazioni lineari di due vettori ed è quindi un sottospazio vettoriale di V . (b) Dato che V_1 non è vuoto, neppure $T(V_1)$ lo è. Inoltre, se $w_1, w_2 \in T(V_1)$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, allora esistono $v_1, v_2 \in V_1$ tali che $T(v_j) = w_j$ per $j = 1, 2$; essendo V_1 un sottospazio vettoriale di V , trovi che $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in V_1$. Inoltre $T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$ e quest'ultimo vettore risulta pertanto appartenere a $T(V_1)$, come richiesto.

Esercizio 5.12 Se $v_1, \dots, v_k \in V$ sono linearmente dipendenti, allora esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = O_V$; calcolando T su ambo i membri e utilizzando il fatto che è lineare, si trova che $\lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_k T(v_k) = O_W$ e quindi anche $T(v_1), \dots, T(v_k) \in W$ sono linearmente dipendenti. L'altra affermazione è semplicemente la contronominale di quella appena dimostrata.

Esercizio 5.13 Se $T(v_1), \dots, T(v_k)$ fossero linearmente dipendenti, troveremmo $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che $\lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_k T(v_k) = O_W$, da cui $T(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k) = O_W$. Poiché i vettori $v_1, \dots, v_k \in V$ sono linearmente indipendenti $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \neq O_V$, avremmo quindi trovato un vettore non nullo di V la cui immagine per l'applicazione T coincide con quella di O_V , il che contraddice l'iniettività di T .

Esercizio 5.14 $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ applicazione identicamente nulla, $v_1 = e_1, v_2 = e_2$.

Esercizio 5.18 $k = 1$; $\operatorname{Ker} T_1 = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 5.19 $T(x) = L_A(x)$ per $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, quindi T è lineare. $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^2$.

Esercizio 5.20 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Se $T(x) = O$, in particolare si deve avere $x_1 + x_2 = 0$ e $x_1 - x_2 = 0$, da cui $x_1 = x_2 = 0$ e quindi T è iniettiva.

12 Soluzioni degli esercizi

Esercizio 5.21 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. $x \in \text{Ker } T$ se e solo se $Ax = 0$; siccome A è triangolare superiore con 3 pivot non nulli, $\text{Ker } T = \{O\}$ e pertanto T è iniettiva.

Esercizio 5.22 Si ha

$$\begin{aligned} T\left(\lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}\right) &= T\begin{vmatrix} \lambda a + \mu e & \lambda b + \mu f \\ \lambda c + \mu g & \lambda d + \mu h \end{vmatrix} \\ &= \lambda a + \mu e - 2(\lambda b + \mu f) + \lambda c + \mu g - (\lambda d + \mu h) \\ &= \lambda(a - 2b + c - d) + \mu(e - 2f + g - h) \\ &= \lambda \cdot T\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \mu \cdot T\begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

per cui T è lineare. Siccome $\text{Im } T \subseteq \mathbb{R}$ e $\text{Im } T \neq \{0\}$ abbiamo $\text{rg } T = 1$. Dal teorema del rango segue che $\dim \text{Ker } T = \dim M_{2,2}(\mathbb{R}) - \text{rg } T = 4 - 1 = 3$. Le matrici $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ appartengono a $\text{Ker } T$ perché rispettivamente $1 - 2 \cdot 0 + 0 - 1 = 0$, $-1 + 2 \cdot 0 + 1 - 0 = 0$ e $2 - 2 \cdot 1 + 0 - 0 = 0$. Imponendo che la loro combinazione lineare con coefficienti α, β, γ sia nulla ottieni $\alpha - \beta + 2\gamma = 0$, $\gamma = 0$, $\beta = 0$, $\alpha = 0$, quindi sono linearmente indipendenti; essendo 3 sono in numero uguale alla dimensione di $\text{Ker } T$ e pertanto ne costituiscono una base.

Esercizio 5.23 $T(\alpha p + \beta q) = \begin{vmatrix} (\alpha p + \beta q)(1) \\ (\alpha p + \beta q)(0) \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} p(1) \\ p(0) \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} q(1) \\ q(0) \end{vmatrix} = \alpha T(p) + \beta T(q)$.
 $\text{Ker } T = \text{Span}(t^2 - t)$.

Esercizio 5.24

- Due esempi sono $T_1(x) = \begin{vmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 \\ x_4 \end{vmatrix}$, e $T_2(x) = \begin{vmatrix} x_1 - x_3 \\ 2x_2 \\ 3x_4 \end{vmatrix}$. Più in generale, è sufficiente prendere $T = L_A$, dove $A = \begin{vmatrix} A^1 & A^2 & A^3 & A^4 \end{vmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ è una matrice tale che $A^3 = -A^1$ e $\{A^1, A^2, A^4\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
- Due esempi sono $T_1(x) = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_1 \end{vmatrix}$ e $T_2(x) = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 - x_2 \end{vmatrix}$. Più in generale, è sufficiente prendere $T = L_A$ con $A = \begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ \lambda & \mu \end{vmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli.
- Non esistono applicazioni lineari che soddisfino le condizioni date, perché tali condizioni contraddicono il teorema della dimensione.

Esercizio 5.25 $\text{Im } T = \text{Im } S_a$ se e solo se $a = 4$. Inoltre $\dim(\text{Im } T \cap \text{Im } S_a)$ è uguale a 2 se $a = 4$, ed è uguale a 1 altrimenti.

Esercizio 5.26

- Se $\dim V > \dim W$, allora $\text{rg } T \leq \dim W < \dim V$, quindi $\dim \text{Ker } T = \dim V - \text{rg } T > 0$ e pertanto T non può essere iniettiva.
- Se $\dim V < \dim W$ allora $\dim \text{Im } T = \text{rg } T = \dim V - \dim \text{Ker } T \leq \dim V < \dim W$ e quindi T non può essere surgettiva.

Esercizio 5.27 Nota che $z_1 A_1 + \dots + z_n A_n = O_{\mathbb{C}^m}$ se e solo se $\bar{z}_1 \overline{A_1} + \dots + \bar{z}_n \overline{A_n} = O_{\mathbb{C}^m}$, inoltre $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ sono non tutti nulli se e solo se $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n \in \mathbb{C}$ lo sono. Pertanto una base di $\text{Im } L_{\overline{A}}$ si ottiene coniugando ciascuno dei vettori di una base di $\text{Im } L_A$ e quindi tali insiemi hanno la stessa cardinalità.

Esercizio 5.28 Il rango della prima matrice è 3, il suo nucleo è $\{O\}$, e l'immagine è $\mathbb{C}^3$. Il rango della seconda matrice è 2, il suo nucleo è $\mathbb{C} \begin{vmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{vmatrix}$, e l'immagine è $\text{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ i \\ 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}\right)$. Il rango della terza matrice è 1, il suo nucleo è $\text{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{vmatrix}\right)$, e l'immagine è $\mathbb{C} \begin{vmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{vmatrix}$.

Esercizio 5.29 T è l'applicazione associata alla matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 3i \end{bmatrix}$, quindi è lineare;
 $\text{Ker } T = \text{Span}(e_1 - 3e_2 - ie_3)$; $\text{Im } T = \mathbb{C}^2$.

Esercizio 5.30 $A = \begin{bmatrix} 4 & i & -2 \\ i & 0 & 1 \\ i & 0 & -i \end{bmatrix}$. Se $T(z) = 0$ allora $4z_1 + iz_2 - 2z_3 = 0$, $iz_1 + z_3 = 0$ e $iz_1 - iz_3 = 0$. Dalla terza equazione ricavi $z_3 = z_1$, sostituendo nella seconda $(1+i)z_1 = 0$, da cui $z_1 = 0$ (e quindi anche $z_3 = 0$). Infine sostituendo tali valori nella prima equazione otteniamo $iz_2 = 0$ che implica $z_2 = 0$, e pertanto T è iniettiva. Oppure puoi ridurre a scala la matrice A , ottenendo

$$\begin{bmatrix} 4 & i & -2 \\ i & 0 & 1 \\ i & 0 & -i \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & i & -2 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 + \frac{1}{2}i \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2}i \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & i & -2 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 + \frac{1}{2}i \\ 0 & 0 & -1 - i \end{bmatrix}.$$

Quindi A è non singolare, per cui $\text{Ker } L_A = \{O\}$ e $T = L_A$ è iniettiva.

Esercizio 5.31

$$\begin{aligned} T \begin{bmatrix} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 & \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 & \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 - i(\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2) \\ \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + 2i(\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2) \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 \begin{bmatrix} a_1 - ic_1 \\ b_1 + 2id_1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} a_2 - ic_2 \\ b_2 + 2id_2 \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 T \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \lambda_2 T \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

per ogni $\lambda_1, \lambda_2, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{C}$. $\text{rg } T = 2$ perché l'immagine di E_{11} e E_{12} sono linearmente indipendenti, da cui segue che $\dim \text{Ker } T = \dim M_{2,2}(\mathbb{C}) - \text{rg } T = 2$. Per verifica diretta si vede che $\begin{bmatrix} 0 & -2i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \text{Ker } T$, inoltre queste due matrici sono linearmente indipendenti e in numero uguale alla dimensione di $\text{Ker } T$ e pertanto ne formano una base.

Esercizio 5.33 $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ garantisce l'additività del coniugio. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{C}$ si ha $\overline{\lambda z} = \overline{\lambda} \overline{z} = \lambda \overline{z}$ che assicura l'omogeneità del coniugio come applicazione su $\mathbb{C}$ visto come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, mentre $i \cdot 1 = -i \neq i = i \cdot 1$ prova che il coniugio non è omogeneo come applicazione su $\mathbb{C}$ visto come spazio vettoriale su sé stesso.

6 Esercizi del Capitolo 6: Sistemi lineari

Esercizio 6.2 Il primo sistema ha un piano di soluzioni, di equazioni parametriche $\begin{cases} x = -\frac{1}{3}t, \\ y = \frac{1}{3}t - s, \\ z = s, \\ v = -t, \\ w = t. \end{cases}$

Il secondo sistema ha una retta di soluzioni, di equazioni parametriche $\begin{cases} x = \frac{1}{3}(1-t), \\ y = \frac{1}{3}(1-4t), \\ z = t. \end{cases}$

Esercizio 6.3 $x = 0, y = t, z = 2t, w = t; x_1 = t + 1, x_2 = t - 2, x_3 = 2t - 3, x_4 = t$.

Esercizio 6.4 Il primo sistema non ammette soluzioni; $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = -3$.

Esercizio 6.5 Il primo sistema ha soluzione $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10}(13-i) \\ -\frac{1}{5}(28+14i) \\ -\frac{1}{2}(1-11i) \end{bmatrix}$. Il secondo sistema non ammette soluzioni.

Esercizio 6.6 $x = -(64 + 49i)t + 319 - 77i, y = -(235 + 109i) - (12 - 52i)t, z = -(67 + 303i) + (14 + 58i)t, w = 89t$; il secondo sistema non ammette soluzioni.

14 Soluzioni degli esercizi

Esercizio 6.7 Il primo sistema per $k \neq 0, 2$ ha come unica soluzione $\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 \\ \frac{3}{k} \\ 1 + \frac{3}{k} \end{vmatrix}$; per $k = 0$ non ammette soluzioni; per $k = 2$ ha un piano di soluzioni, di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 - s - t, \\ y = s, \\ z = t. \end{cases} \quad \text{Il secondo sistema per } k \neq 1, 2 \text{ ha come unica soluzione}$$

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{k^2+k-2}{k-2} \\ \frac{3k^3+2k^2-k(h+8)+2h}{(k-1)(k-2)} \\ -\frac{3k^3+3k^2-k(h+9)+2h}{(k-1)(k-2)} \end{vmatrix};$$

per $k = 1$ e $h \neq 3$ non ammette soluzioni; per $k = 1$ e $h = 3$ ha una retta di soluzioni di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 1 - t, \\ z = t; \end{cases} \quad \text{per } k = 2 \text{ non ammette soluzioni indipendentemente dal valore di } h \in \mathbb{R}.$$

Il terzo sistema per $k \neq 1, -2$ ha come unica soluzione

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{k-h^2-h+1}{(k-1)(k+2)} \\ \frac{kh-h^2+h-1}{(k-1)(k+2)} \\ \frac{kh^2+h^2-h-1}{(k-1)(k+2)} \end{vmatrix};$$

per $k = 1$ e $h \neq 1$ non ammette soluzioni; per $k = h = 1$ ha un piano di soluzioni di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 - s - t, \\ y = s, \\ z = t; \end{cases} \quad \text{infine, per } k = -2 \text{ non ammette soluzioni indipendentemente dal valore di } h \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 6.8 Se $k \neq 0, i, -i$ l'unica soluzione è $x = \frac{a(k^2+2)+2}{k^3+k}, y = \frac{-a+k^2-1}{k^3+k}, z = -\frac{a+2}{k^3+k}$ per ogni $a \in \mathbb{C}$; se $k = 0$ il sistema ammette soluzioni se e solo se $a = -1$ nel qual caso sono date da $x = -2y, y = y, z = -1$; se $k = i$ il sistema ammette soluzioni se e solo se $a = -2$ date da $x = x, y = -i - x, z = -2 - ix$; se $k = -i$ il sistema ammette soluzioni se e solo se $a = -2$ e sono date da $x = x, y = -x - i, z = -2 - ix$.

Esercizio 6.9 Per il primo sistema, se $k \neq \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}$ l'unica soluzione è $x = \frac{2(hk+h+4k^2-1)}{4k^2-1}, y = -\frac{4h}{2k+1}, z = \frac{2(hk-h)}{4k^2-1}$ per ogni $h \in \mathbb{C}$; se $k = \frac{1}{2}$ il sistema ammette soluzioni se e solo se $h = 0$ nel qual caso sono date da $x = x, y = 0, z = \frac{2-x}{3}$; se $k = -\frac{1}{2}$ il sistema ammette soluzioni se e solo se $h = 0$ e sono date da $y = 8(x-2), z = -3(x-2)$. Per il secondo, se $k \neq \frac{5}{3}$ l'unica soluzione è $x_1 = -\frac{2(-hk+k^3-3k^2-k+5)}{3k-5}, x_2 = \frac{hk-2h+2k^3-8k+4}{3k-5}, x_3 = \frac{-h-2k^2+2k+2}{3k-5}$ per ogni $h \in \mathbb{C}$; se $k = \frac{5}{3}$ il sistema ammette soluzioni se e solo se $h = -\frac{2}{9}$ nel qual caso sono date da $x_1 = x_1, x_2 = \frac{268-9x_1}{90}, x_3 = -\frac{9x_3+32}{30}$.

Esercizio 6.13 Sia la prima matrice sia la seconda matrice hanno nucleo costituito dal solo vettore nullo, la cui base è vuota, mentre l'immagine di entrambe le matrici è costituita da $\mathbb{R}^3$, quindi si può prendere come base dell'immagine la base canonica. Lo stesso accade per le trasposte di entrambe le matrici.

Esercizio 6.14 La prima matrice ha nucleo costituito dal solo vettore nullo (la cui base è vuota), mentre l'immagine è $\text{Span} \left(\begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \\ 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix} \right)$, una cui base è $\begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \\ 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}$; la sua trasposta ha come nucleo $\mathbb{R} \begin{vmatrix} 51 \\ 1 \\ 40 \\ -1 \end{vmatrix}$, come base del nucleo si può prendere il vettore $\begin{vmatrix} 51 \\ 1 \\ 40 \\ -1 \end{vmatrix}$, l'immagine della trasposta

è $\mathbb{R}^3$ e come base va bene la base canonica. La seconda matrice ha nucleo $\text{Span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$, una cui base è $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, mentre l'immagine di tale matrice è $\mathbb{R}^2$, quindi si può prendere come base dell'immagine la base canonica. Per quanto riguarda la trasposta, il nucleo è dato dal solo vettore nullo, mentre l'immagine è $\text{Span} \left(\begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$, una cui base è data dai due vettori $\begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Esercizio 6.15 $\dim \text{Im } A = 3 = \dim \text{Im } A^T$, $\dim \text{Ker } A = 1$ e $\dim \text{Ker } A^T = 0$. $\text{Im } A$ ha una base formata da prima, seconda e quarta colonna di A ; $\text{Ker } A$ è generato da $5e_1 - 4e_2 + 7e_3 \in \mathbb{R}^4$; $\text{Im } A^T$ ha una base formata dalle tre colonne di A^T , $\text{Ker } A^T = \{O\}$. $\dim \text{Im } B = 2 = \dim \text{Im } B^T$, $\dim \text{Ker } B = 0$ e $\dim \text{Ker } B^T = 1$. $\text{Im } B$ ha una base formata dalle due colonne di B ; $\text{Ker } B = \{O\}$; $\text{Ker } B^T$ è generato da $(\pi - 1)e_1 - (2\pi - 1)e_2 + e_3 \in \mathbb{R}^3$; e $\text{Im } B^T$ ha una base formata dalle prime due colonne di B^T .

Esercizio 6.16 $\dim \text{Ker } A = \dim \text{Ker } A^T = 1$, $\text{rg } A = \text{rg } A^T = 2$, $\text{Ker } A = \text{Span} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$, $\text{Im } A = \text{Span} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} \right)$; $\text{Ker } A^T = \text{Span} \left(\begin{bmatrix} 9 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$, $\text{Im } A^T = \text{Span} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} \right)$. Il sistema proposto ammette soluzione se e solo se $k = 1$, in tal caso le soluzioni sono date da $x = t$, $y = \frac{t+1}{2}$, $z = \frac{1-t}{2}$.

Esercizio 6.18 $\text{Ker } T = \{O\}$; una base di $\text{Im } T$ è $\{e_2 + e_4, e_1 + e_2 + 2e_4, e_1 - e_2 + e_3\} \subset \mathbb{R}^4$; $T(U) \cap T(W)$ ha dimensione 1 ed è generato da $4e_2 - e_3 + 4e_4 \in \mathbb{R}^4$.

Esercizio 6.19 Per $\alpha \neq 0, -4$ si ha $\text{Im } A_\alpha = \mathbb{R}^3$ e $\text{Ker } A_\alpha = \{O\}$; quindi $\dim \text{Im } A_\alpha = 3$ e $\dim \text{Ker } A_\alpha = 0$. Per $\alpha = 0$ si ha $\dim \text{Im } A_0 = 2$ e $\dim \text{Ker } A_0 = 1$, una base di $\text{Im } A_0$ è $\{-e_2 + 2e_3, e_1 + 2e_2\}$ e $\text{Ker } A_0$ è generato da e_2 . Per $\alpha = -4$ si ha $\dim \text{Im } A_{-4} = 2$ e $\dim \text{Ker } A_{-4} = 1$, una base di $\text{Im } A_{-4}$ è $\{e_1, e_2 - 2e_3\}$, $\text{Ker } A_{-4}$ è generato da $8e_1 - 11e_2 + 4e_3$. Infine, $\mathbb{R}^3 = \text{Im } A_\alpha \oplus \text{Ker } A_\alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6.22 $\dim \bigcap_{t \in \mathbb{R}} V_t = 0$, una base è l'insieme vuoto; $\dim \bigcap_{t \in \mathbb{R}} W_t = 2$, una base è data da $w_1 = -2e_1 + e_3$, $w_2 = -e_1 + e_4$.

Esercizio 6.24 Equazioni cartesiane per $U \cap W$:
$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ 3x_3 - \frac{5}{2}x_4 = 0; \end{cases} \quad \text{equazioni parametriche per } U \cap W:$$

$$\begin{cases} x_1 = 7t, \\ x_2 = 10t, \\ x_3 = 20t, \\ x_4 = t; \end{cases} \quad \text{equazioni cartesiane per } U + W: 0 = 0; \text{ equazioni parametriche per } U + W:$$

Esercizio 6.25 Si ha $\dim(U + W) = 4$; quindi $U + W = \mathbb{R}^4$, da cui segue che una base è $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, possibili equazioni parametriche sono
$$\begin{cases} x_1 = t_1, \\ x_2 = t_2, \\ x_3 = t_3, \\ x_4 = t_4, \end{cases} \quad \text{e l'equazione cartesiana è } 0 = 0. \text{ Invece } \dim(U \cap W) = 2, \text{ una base è } \{15e_1 - 9e_2 + 7e_3 - 38e_4, 30e_1 + 36e_2 + 32e_3 - 13e_4\},$$

16 Soluzioni degli esercizi

possibili equazioni cartesiane per $U \cap W$ sono $\begin{cases} 11x_1 - 7x_2 + 6x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \end{cases}$ e possibili equazioni parametriche sono $\begin{cases} x_1 = 15t_1 + 30t_2, \\ x_2 = -9t_1 + 36t_2, \\ x_3 = 7t_1 + 32t_2, \\ x_4 = -38t_1 - 13t_2. \end{cases}$

Esercizio 6.26 $\dim(U + W) = 4$, base e_1, e_2, e_3, e_4 ; equazioni parametriche per $U + W$:

$$\begin{cases} x_1 = t_1, \\ x_2 = t_2, \\ x_3 = t_3, \\ x_4 = t_4; \end{cases} \quad \text{equazioni cartesiane per } U + W: 0 = 0.$$

$\dim(U \cap W) = 1$, base $\begin{bmatrix} 87 \\ -116 \\ 1259 \\ 2605 \end{bmatrix}$, equazioni parametriche per $U \cap W$: $\begin{cases} x_1 = 87t, \\ x_2 = -116t, \\ x_3 = 1259t, \\ x_4 = 2605t, \end{cases}$ equazioni cartesiane per $U \cap W$: $\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 86x_1 - 209x_2 - 139x_3 + 55x_4 = 0. \end{cases}$

Esercizio 6.29 $x_1 - x_3 + 6x_4 = 0$; $\begin{cases} x_1 = t - 6\tau, \\ x_2 = s, \\ x_3 = t, \\ x_4 = \tau; \end{cases}$ non sono le equazioni di partenza perché per uno stesso sottospazio vettoriale ci sono infinite equazioni parametriche differenti.

Esercizio 6.30 $\begin{cases} 22x_1 + 14x_2 - 13x_3 = 0, \\ 7x_1 + 8x_2 + 13x_4 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = \frac{4t+7s}{3}, \\ x_2 = -\frac{7s+22t}{6}, \\ x_3 = s, \\ x_4 = t; \end{cases}$ non sono le equazioni di partenza perché c'è un parametro in meno, dato che il sottospazio vettoriale ha dimensione 2.

Esercizio 6.31 $\begin{cases} x = -2(s+t), \\ y = s+3t, \\ z = s, \\ w = t; \end{cases}$ $\begin{cases} x+2z+2w = 0, \\ y-z-3w = 0; \end{cases}$ non sono le equazioni di partenza perché queste sono due equazioni, mentre quelle di partenza erano tre.

Esercizio 6.32 Per $t \neq 0, -1/2$ si ha $V_t = \mathbb{R}^4$, per cui possibili equazioni parametriche sono

$\begin{cases} x_1 = s_1, \\ x_2 = s_2, \\ x_3 = s_3, \\ x_4 = s_4, \end{cases}$ e l'equazione cartesiana è $0 = 0$. Possibili equazioni parametriche per V_0 sono $\begin{cases} x_1 = s_1, \\ x_2 = s_1, \\ x_3 = s_3, \\ x_4 = s_1 + s_2, \end{cases}$ mentre una possibile equazione cartesiana è $x_1 - x_2 = 0$. Possibili equazioni

parametriche per $V_{-1/2}$ sono $\begin{cases} x_1 = s_1, \\ x_2 = s_1 - \frac{1}{2}s_2, \\ x_3 = -\frac{1}{2}s_1 - \frac{1}{2}s_3, \\ x_4 = s_1 + s_2 + s_3, \end{cases}$ mentre una possibile equazione cartesiana è $2x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$.

Esercizio 6.35 Per il primo sottospazio affine $\begin{cases} x_1 + x_2 = -5, \\ x_1 + x_3 = -13, \\ x_1 - x_4 = -2; \end{cases}$ per il secondo sottospazio $x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 0$.

Esercizio 6.38 $x + 5y - 8z - 4w = 77$.

Esercizio 6.39 $\begin{cases} x = \frac{33}{14} - 25t, \\ y = 44t + \frac{89}{70}, \\ z = -t - \frac{41}{70}, \\ w = 35t. \end{cases}$

7 Esercizi del Capitolo 7: Matrici e applicazioni lineari

Esercizio 7.1 Poiché $\text{Im}(T \circ S) \subseteq \text{Im } T$, allora $\text{rg}(T \circ S) \leq \text{rg } T$; poiché $\text{Im}(T \circ S) = \text{Im}(T|_{\text{Im } S})$, allora $\text{rg}(T \circ S) \leq \text{rg } S$ e quindi $\text{rg}(T \circ S) \leq \min\{\text{rg } S, \text{rg } T\}$.

Esercizio 7.2 Si ha $S \circ T \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = S(x + (2y - x)t + zt^2) = \begin{vmatrix} x \\ 2y + z \end{vmatrix}$. Da questo segue che

$\text{Ker}(S \circ T)$ è la retta di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 0, \\ y = t, \\ z = -2t, \end{cases}$ e di conseguenza il Teorema della

dimensione implica che $\text{Im}(S \circ T) = \mathbb{R}^2$.

Esercizio 7.3 Dato che $(\text{id}_V - T)(\text{id}_V + T) = \text{id}_V - T + T - T \circ T = \text{id}_V$ e analogamente per $(\text{id}_V + T)(\text{id}_V - T)$, l'inversa di $T + \text{id}_V$ è $\text{id}_V - T$.

Esercizio 7.4 $T \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_{23} \\ a_{11} & 0 \end{vmatrix}$ è un'applicazione lineare da $M_{3,3}(\mathbb{R})$ a

$M_{2,2}(\mathbb{R})$. Un isomorfismo $T : M_{3,4}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{6,2}(\mathbb{R})$ è $T \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$.

Esercizio 7.5 $a \neq 0$ e $a \neq 1$.

Esercizio 7.6 Se $T(v) = O$, allora $v = T^r(v) = T^{r-1}(T(v)) = O$, quindi $\text{Ker } T = \{O\}$ e pertanto T è un isomorfismo la cui inversa è T^{r-1} .

Esercizio 7.7 Dato $v \in V$, hai $v = (v - P(v)) + P(v)$: il primo addendo appartiene a $\text{Ker } P$ in quanto $P(v - P(v)) = P(v) - P(P(v)) = O$ perché P è una proiezione, mentre il secondo addendo appartiene banalmente a $\text{Im } P$, per cui $\text{Ker } P + \text{Im } P = V$. Inoltre

$$\dim(\text{Ker } P \cap \text{Im } P) = \dim \text{Ker } P + \dim \text{Im } P - \dim(\text{Ker } P + \text{Im } P) = \dim \text{Ker } P + \text{rg } P - \dim V = 0$$

e pertanto $\text{Ker } P$ e $\text{Im } P$ sono in somma diretta, da cui $\text{Ker } P \oplus \text{Im } P = V$.

Esercizio 7.8 Se V e W sono isomorfi, esiste $T : V \rightarrow W$ isomorfismo, quindi $\text{Ker } T = \{O\}$ e $\text{Im } T = W$, pertanto il teorema della dimensione implica che $\dim V = \dim W$. Viceversa, se $\dim V = \dim W = n$, scelte due basi $\mathcal{B}_V$ di V e $\mathcal{B}_W$ di W , allora l'applicazione lineare $F_{\mathcal{B}_W}^{-1} \circ F_{\mathcal{B}_V} : V \rightarrow W$ è un isomorfismo.

Esercizio 7.11 La matrice è λI_n .

18 Soluzioni degli esercizi

Esercizio 7.15
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 10 \\ -1 & 10 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \\ 9 & 9 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 15 \\ 5 & 52 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 8 & 14 & 20 \\ 11 & 20 & 29 \end{vmatrix}.$$

Esercizio 7.16 Sono tutte e sole le matrici della forma $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

Esercizio 7.18
$$A^n = \begin{vmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & \frac{3^n-1}{2} \\ 2 \cdot 3^{n-1} & 2 \cdot 3^{n-1} & 3^n-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Esercizio 7.19 Se X_1, X_2 appartengono a W abbiamo $A(X_1+X_2) = AX_1+AX_2 = O+O = O$, per cui $X_1+X_2 \in W$. Analogamente, se $X \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ abbiamo $A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda O = O$, per cui $\lambda X \in W$. Essendo chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari, W è un sottospazio.

Per definizione, una matrice $X = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix}$ appartiene a W se e solo se
$$\begin{cases} x_{11} + 2x_{21} = 0, \\ -2x_{11} - 4x_{21} = 0, \\ x_{12} + 2x_{22} = 0, \\ -2x_{12} - 4x_{22} = 0. \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti di questo sistema è $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{vmatrix}$, che ha rango 2. Quindi lo

spazio delle soluzioni del sistema ha dimensione $4-2=2$; inoltre una base dello spazio delle solu-

zioni è $\left\{ \begin{vmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1/2 \end{vmatrix} \right\}$. Di conseguenza $\dim W = 2$ e una sua base è $\left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1/2 \end{vmatrix} \right\}$.

Esercizio 7.21 Per $k = -1$.

Esercizio 7.23

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & 1/2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 1/4 & -3/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 5/4 & -3/4 & 1/4 & -7/4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 6/31 & 2/31 & 5/31 & -4/31 \\ 5/62 & -19/62 & -1/62 & 7/62 \\ -3/31 & -1/31 & 13/31 & 2/31 \\ 3/62 & 1/62 & -13/62 & 29/62 \end{vmatrix}.$$

Esercizio 7.24 La matrice è invertibile per $h \neq \pm\sqrt{2}$, l'inversa è $\frac{1}{h^2-2} \begin{vmatrix} h & -2 & h \\ -2 & 2h & -h^2 \\ 1 & -h & h^2-1 \end{vmatrix}$.

Esercizio 7.25 $A = I_n, B = -I_n$.

Esercizio 7.26 Se A non è invertibile, allora $\text{Ker } A \neq \{O\}$; preso $v \in \text{Ker } A \setminus \{O\}$, la matrice $B = |v \cdots v| \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ non è nulla e $AB = O$. Viceversa, se esiste $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ non nulla tale che $AB = O$, basta prendere una colonna non nulla di B per ottenere un elemento non nullo di $\text{Ker } A$ e quindi A non è invertibile.

Esercizio 7.27 Se $x \in \text{Ker } A \setminus \{O\}$, abbiamo $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = 0$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Dato che $x \neq O$, indicato con i l'indice per il quale $|x_i|$ è massimo, a meno di moltiplicare x per uno scalare, possiamo supporre che $x_i = 1$ e $|x_j| \leq 1$ se $j \neq i$. Abbiamo allora $a_{ii} = a_{ii}x_i = -(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{i,i-1}x_{i-1} + \widehat{a_{ii}x_i} + a_{i,i+1}x_{i+1} + \cdots + a_{in}x_n)$. Prendendo il valore assoluto di ambo i membri si trova

$$\begin{aligned} |a_{ii}| &= |a_{i1}x_1 + \cdots + a_{i,i-1}x_{i-1} + \widehat{a_{ii}x_i} + a_{i,i+1}x_{i+1} + \cdots + a_{in}x_n| \\ &\leq |a_{i1}||x_1| + \cdots + |a_{i,i-1}||x_{i-1}| + |\widehat{a_{ii}x_i}| + |a_{i,i+1}||x_{i+1}| + \cdots + |a_{in}||x_n| \\ &\leq |a_{i1}| + \cdots + |a_{i,i-1}| + |\widehat{a_{ii}x_i}| + |a_{i,i+1}| + \cdots + |a_{in}| < |a_{ii}| \end{aligned}$$

che è una contraddizione (l'ultima disuguaglianza è quella fornita dall'ipotesi), per cui $\text{Ker } A = \{O\}$ e quindi A è invertibile.

Esercizio 7.29 Si ha

$$\begin{aligned} \text{tr}(AB) &= (AB)_{11} + \cdots + (AB)_{nn} \\ &= (a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1}) + \cdots + (a_{n1}b_{1n} + \cdots + a_{nn}b_{nn}) \\ &= (b_{11}a_{11} + \cdots + b_{n1}a_{1n}) + \cdots + (b_{1n}a_{n1} + \cdots + b_{nn}a_{nn}) \\ &= (b_{11}a_{11} + \cdots + b_{1n}a_{n1}) + \cdots + (b_{n1}a_{1n} + \cdots + b_{nn}a_{nn}) \\ &= (BA)_{11} + \cdots + (BA)_{nn} = \text{tr}(BA). \end{aligned}$$

La prima uguaglianza segue dalla definizione di traccia, la seconda dalla formula per il prodotto di matrici, la terza scambiando i fattori dei vari prodotti, la quarta riordinando la sommatoria, poi usiamo di nuovo la formula per il prodotto di matrici e la definizione di traccia.

Nota: Questa dimostrazione è più chiara usando il simbolo di sommatoria, che sarà introdotto nell'Osservazione 9.5. Infatti si ha

$$\text{tr}(AB) = \sum_{h=1}^n (AB)_{hh} = \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^n a_{hk}b_{kh} = \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n b_{kh}a_{hk} = \sum_{k=1}^n (BA)_{kk} = \text{tr}(BA).$$

Infine,

$$\text{tr}(B^{-1}AB) = \text{tr}(B^{-1}(AB)) = \text{tr}((AB)B^{-1}) = \text{tr}(A(BB^{-1})) = \text{tr}(A).$$

Esercizio 7.30 $\text{tr}(I_n) = 1 + \cdots + 1 = n$; mentre $\text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0$; pertanto $AB - BA$ non può mai essere uguale a I_n .

8 Esercizi del Capitolo 8: Cambiamenti di base

Esercizio 8.2 Poiché $U_1, U_2 \subseteq U_1 + U_2$, allora $T(U_1), T(U_2) \subseteq T(U_1 + U_2)$; dato che quest'ultimo è un sottospazio vettoriale, allora $T(U_1) + T(U_2) \subseteq T(U_1 + U_2)$. Viceversa, ogni elemento di $T(U_1 + U_2)$ si scrive come $T(u)$ per un opportuno $u \in U_1 + U_2$; la definizione di $U_1 + U_2$ ci garantisce che esistono $u_1 \in U_1$ e $u_2 \in U_2$ tali che $u = u_1 + u_2$, pertanto $T(u) = T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) \in T(U_1) + T(U_2)$ e quindi anche l'altra inclusione è verificata.

Esercizio 8.3 v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti perché $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = O$ equi-

vale a $\begin{cases} \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ 5\lambda_3 = 0 \end{cases}$ e si vede facilmente che l'unica soluzione di questo sistema lineare

è quella nulla; sono inoltre 3 vettori e $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. La matrice di cambiamento di base dalla base

$\mathcal{B}$ alla base canonica è data da $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{2}{5} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$.

20 Soluzioni degli esercizi

Esercizio 8.4 Le due terne di vettori sono basi di $\mathbb{R}_2[t]$ in quanto contengono vettori in numero uguale alla dimensione di $\mathbb{R}_2[t]$ e tali vettori sono linearmente indipendenti (basta considerare la matrice del cambiamento di base dalla base dei monomi a $\mathcal{B}$ o $\mathcal{C}$ e ridurre a scala). La matrice del

$$\text{cambiamento di base da } \mathcal{B} \text{ a } \mathcal{C} \text{ è } \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -3 & -7 & 6 \\ 0 & -4 & 12 \\ -3 & -1 & -6 \end{vmatrix}.$$

Esercizio 8.5 Procediamo come nell'Esempio 8.6, con $\mathcal{B}_0 = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right\}$ come base intermedia. La matrice A (rispettivamente, C) di cambiamento di base da $\mathcal{B}_0$ a $\mathcal{B}$ (rispettivamente, C) contiene per colonne le coordinate degli elementi di $\mathcal{B}$ (rispettivamente, C) rispetto alla base $\mathcal{B}_0$ e quindi sono date da

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

La matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ è $B = A^{-1}C$, assumendo che $\mathcal{B}$ sia una base e quindi A sia invertibile. Con una riduzione a scala troviamo

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & -2 & 0 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right| &\longrightarrow \left| \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & -1 & 2 & -2 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right| \\ &\longrightarrow \left| \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -1 & 2 & -2 & -3 & -6 \end{array} \right| \longrightarrow \left| \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -7 & -1 & 2 & -2 & -3 & -6 \end{array} \right| \\ &\longrightarrow \left| \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3/2 & -25/2 & -3 & 1 \end{array} \right|. \end{aligned}$$

Essendo i pivot di A tutti diversi da 0, ne segue che la matrice A è invertibile (e che $\mathcal{B}$ è una base). Proseguendo come nell'Esempio 8.6 otteniamo

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 5 & 1 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3/2 & -25/2 & -3 & 1 \end{array} \right| &\longrightarrow \left| \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 5 & 0 & -1/2 & -21/2 & -1 & 8 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & -3 & -24 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3/2 & -25/2 & -3 & 1 \end{array} \right| \\ &\longrightarrow \left| \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & 0 & 0 & 2 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -3/2 & -39/2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3/2 & -25/2 & -3 & 1 \end{array} \right| \\ &\longrightarrow \left| \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 23 & 17/3 & 5/3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -3/2 & -39/2 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3/2 & -25/2 & -3 & 1 \end{array} \right| \end{aligned}$$

e quindi

$$B = \begin{vmatrix} 4 & 23 & 17/3 & 5/3 \\ -1/2 & -13/2 & -5/3 & 1/3 \\ -1/2 & -3/2 & 0 & 1 \\ 3/2 & 25/2 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Infine, una riduzione a scala effettuata sulla matrice C (o sulla matrice B) mostra che anche C è invertibile, per cui anche $\mathcal{C}$ è una base.

Esercizio 8.6 $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ sono 3 polinomi di $\mathbb{C}_2[t]$ che ha dimensione 3 e lo stesso accade per $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$; basta quindi provare che la matrice delle coordinate rispetto a una base è invertibile e questo si può fare facilmente rispetto alla base $1, t, t^2$. La matrice del cambiamento

$$\text{di base da } \mathcal{B} \text{ a } \mathcal{C} \text{ è data da } \frac{5+i}{26} \begin{vmatrix} -3+3i & 5+3i & 4+6i \\ -2+8i & 21-8i & -10+i \\ 6 & -5-10i & 2+3i \end{vmatrix}.$$

Esercizio 8.7 v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti in quanto $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = O$

equivale a
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ 4\lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$
 e riducendo a scala trovi che l'unica soluzione di questo

sistema lineare è quella nulla, inoltre sono 3 vettori e $\dim \mathbb{R}^3 = 3$; lo stesso accade per u_1, u_2, u_3 .

La matrice di cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{C}$ è data da $\frac{1}{30} \begin{vmatrix} 12 & -104 & -34 \\ 27 & 101 & 31 \\ -3 & -29 & 11 \end{vmatrix}$.

Esercizio 8.8 v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti in quanto $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = O$

equivale a
$$\begin{cases} (1+i)\lambda_1 + i\lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ (2-i)\lambda_1 + \lambda_2 + i\lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_1 + (1+3i)\lambda_2 - i\lambda_3 = 0 \end{cases}$$
 e riducendo a scala trovi che l'unica soluzione di

questo sistema lineare è quella nulla, inoltre sono 3 vettori e $\dim \mathbb{C}^3 = 3$; lo stesso accade per

u_1, u_2, u_3 . La matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ è $\frac{7+2i}{53} \begin{vmatrix} 1+5i & 10-2i & 20-2i \\ -2-4i & 1+9i & -16+12i \\ 7-6i & -1-2i & -3-4i \end{vmatrix}$.

Esercizio 8.9 $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ è una base di $\mathbb{R}_3[t]$.

Esercizio 8.10 $\dim W = 3$; una base di W è data da $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Esercizio 8.11 Procedendo come nell'Esempio 8.2 si trova che $\dim(U+W) = 3$, con base $\{p_1, p_2, q_2\}$, e $\dim(U \cap W) = 1$, con base $\{-6q_2 + q_3 = 6 - 4t + 8t^2\}$.

Esercizio 8.12 $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Esercizio 8.13 (a)

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -16/19 & 23/19 & -24/19 \\ 7/19 & 22/19 & -18/19 \\ 224/19 & 20/19 & 32/19 \end{vmatrix}$$

per L_A , e

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 36/19 & 2/19 & 2/19 \\ 8/19 & 30/19 & -8/19 \\ 85/19 & -9/19 & 86/19 \end{vmatrix}$$

per L_B ;

(b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ -3 & -6 & -4 \end{vmatrix}$$

per L_A , e

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

per L_B ;

(c)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 27/2 & 9/2 & -1 \\ -7/2 & 5/2 & -3 \\ -19/2 & -7/2 & 1 \end{vmatrix}$$

per L_A , e

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 6 & -2 & 1 \\ -9 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

22 Soluzioni degli esercizi

per L_B ;

(d)

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11/19 & 22/19 & 35/19 \\ 13/19 & 26/19 & 31/19 \\ 36/19 & 72/19 & 4 \end{vmatrix}$$

per L_A , e

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6/19 & 14/19 & 4/19 \\ 14/19 & 20/19 & 22/19 \\ -8/19 & -44/19 & -94/19 \end{vmatrix}$$

per L_B .

Esercizio 8.14 $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}.$

Esercizio 8.15 Una (facilissima) riduzione a scala della matrice $B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ mostra

che $\mathcal{B}$ è una base. L'endomorfismo T dev'essere della forma L_A , dove $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ è tale che

$AB = C$, dove $C = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ contiene i vettori w_1, w_2, w_3 . Quindi

$$A = CB^{-1} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Questa è anche la matrice associata a T rispetto alla base canonica, mentre la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$B^{-1}AB = B^{-1}(CB^{-1})B = B^{-1}C = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3/2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Esercizio 8.16 $\dim \operatorname{Im} T = 1$, base di $\operatorname{Im} T = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right\}$; $\dim \ker T = 3$, base di $\ker T = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right\}$.

Esercizio 8.17 $A = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}.$

Esercizio 8.18 $\mathcal{B} = \left\{ \begin{vmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right\}; T \left(\begin{vmatrix} x_3 - 2x_2 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} -x_2 + 3x_3 \\ -2x_3 + x_4 \\ -5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \\ x_2 - x_4 \end{vmatrix}.$ Poiché

$-x_2 + 3x_3 + 2(-2x_3 + x_4) - (-5x_2 + 3x_3 + 2x_4) = 0$, T manda W in sé. La matrice associata

a T rispetto a $\mathcal{B}$ è data da $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -5 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$

Esercizio 8.19 Si ha

$$T(X_1 + X_2) = A(X_1 + X_2) - (X_1 + X_2)A = (AX_1 - X_1A) + (AX_2 - X_2A) = T(X_1) + T(X_2),$$

$$T(\lambda X) = A(\lambda X) - (\lambda X)A = \lambda(AX - XA) = \lambda T(X),$$

per cui T è lineare. Rispetto alla base $\mathcal{B}_0 = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right\}$ l'endomorfismo

T è rappresentato dalla matrice

$$M = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Riducendo a scala si vede subito che $\text{Im } M = \text{Span} \left(\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{vmatrix} \right)$ e che $\text{Ker } M = \text{Span} \left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right)$,
 per cui $\text{Im } T = \text{Span} \left(\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \right)$ e $\text{Ker } T = \text{Span} \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right)$. Siccome la
 matrice

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ha rango 4, ne segue (perché?) che $M_{2,2}(\mathbb{R}) = \text{Ker } T \oplus \text{Im } T$.

Esercizio 8.20 $\text{rg } T = \dim \text{Ker } T = 2$, base $\text{Ker } T = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \right\}$,

base $\text{Im } T = \left\{ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \right\}$

Esercizio 8.21 Sono 4 elementi di $M_{2,2}(\mathbb{C})$ che ha dimensione 4, quindi basta provare che sono linearmente indipendenti, il che si vede scrivendo le coordinate degli elementi di $\mathcal{B}$ rispetto alla base delle matrici elementari, riducendo a scala la matrice 4×4 che si ottiene e verificando che ha 4 pivot non nulli. La matrice associata all'applicazione lineare S rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$\begin{vmatrix} 2+2i & -2+i & -2+i & -9-6i \\ -7+5i & 6-23i & 5-32i & 70-27i \\ 4-4i & -3+15i & -2+21i & -45+20i \\ -i & i & i & -3+6i \end{vmatrix}; \text{Ker } S = \{O\}, \text{Im } S = M_{2,2}(\mathbb{C}).$$

Esercizio 8.22 $\text{rg } T = 6$, $\dim \text{Ker } T = 3$, base di $\text{Ker } T = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} \right\}$.

Esercizio 8.23 La prima matrice è data da $\frac{1}{3} \begin{vmatrix} -1 & 1 & -4 \\ -2 & -4 & -4 \\ -1 & -1 & -4 \end{vmatrix}$, la seconda da $\begin{vmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{vmatrix}$,

la terza da $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; base $\text{Ker } T = \{t^2\}$, base di $\text{Im } T = \{1, t\}$.

Esercizio 8.24 La matrice è $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -20 \end{vmatrix}$, $\text{Ker } T = \text{Span}(1)$, $\text{Im } T = \text{Span} \left(\begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ -3 \\ -20 \end{vmatrix} \right)$.

Esercizio 8.25 La matrice associata è data da $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$, inoltre $\text{Ker } T = \text{Span}(t)$,

$\text{Im } T = \text{Span} \left(\begin{vmatrix} (1+i)t \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2t^2 \\ -t^2 \end{vmatrix} \right)$.

Esercizio 8.26 La prima coppia di matrici è costituita da matrici simili: infatti, si passa dall'una all'altra scambiando le ultime due coordinate (che è equivalente a prendere come nuova base quella ottenuta scambiando gli ultimi due vettori della base canonica), per cui

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

24 Soluzioni degli esercizi

Le due matrici nella seconda coppia invece non sono simili. Il modo più veloce per dimostrarlo consiste nel ricorrere all'Esercizio 7.25: la traccia della prima matrice è 6, quella della seconda è 11, e quindi non possono essere simili. Un secondo modo consiste nel notare che la prima matrice è invertibile mentre la seconda non lo è, per cui non possono essere simili. Infine, un terzo modo consiste nel procedere come indicato nell'Osservazione 8.2, dove A è la prima matrice e A' la seconda. Il sistema $BA' - AB = O$ nella matrice incognita B è rappresentato dalla matrice

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & -2 & -3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 6 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 4 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 4 & -3 & -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Una riduzione a scala mostra che questa matrice è invertibile; quindi il sistema $BA' - AB = O$ ammette solo la soluzione nulla, per cui A e A' non sono simili.

Esercizio 8.27 Sia $n = \dim V$ e $m = \dim W$. Il teorema della dimensione ci dice che il nucleo di T ha dimensione $n - r$; sia $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ una base di $\text{Ker } T$, completiamola a una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ di V , e poniamo $U = \text{Span}(v_1, \dots, v_r)$, e $w_j = T(v_j)$ per $j = 1, \dots, r$. Siccome $U \cap \text{Ker } T = \{O\}$, abbiamo che $T|_U$ è iniettivo; quindi $\{w_1, \dots, w_r\}$ sono linearmente indipendenti. Completiamoli a una base $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_m\}$; si verifica immediatamente che la matrice che rappresenta T rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ è della forma voluta.

Esercizio 8.28 Ad esempio $T = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$.

Esercizio 8.29 Indicati con $v_1, \dots, v_n$ i vettori della base $\mathcal{B}$, il fatto che la matrice associata a T rispetto a $\mathcal{B}$ sia la matrice identità implica che $T(v_j) = v_j$ per $j = 1, \dots, n$. Pertanto id_V e T sono due applicazioni lineari che assumono gli stessi valori su una base e quindi coincidono.

9 Esercizi del Capitolo 9: Determinanti

Esercizio 9.2 $A^T = A$ se e solo se $a_{12} = a_{21}$, $A^2 = \begin{vmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 & a_{12}(a_{11} + a_{22}) \\ a_{12}(a_{11} + a_{22}) & a_{12}^2 + a_{22}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ implica $a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1$, $a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1$ e $a_{12}(a_{11} + a_{22}) = 0$. Se $a_{12} = 0$, allora $a_{11}^2 = a_{22}^2 = 1$; poiché $\det A > 0$, hai che a_{11} e a_{22} devono essere concordi, quindi entrambi uguali a 1 oppure a -1, pertanto $|a_{11} + a_{22}| = 2$. Se invece $a_{12} \neq 0$, allora $a_{22} = -a_{11}$, quindi $\det A = -a_{11}^2 - a_{12}^2 \leq 0$ il che contraddice $\det A > 0$.

Esercizio 9.3 $6\pi, -3, -1$.

Esercizio 9.5 $\frac{3}{2}, 1, -2$.

Esercizio 9.6 Per la prima matrice conviene sostituire R_1 con $R_1 - 3R_3$ e poi usare lo sviluppo di Laplace lungo la terza colonna, ottenendo 36; in alternativa puoi prendere al posto di R_4 la differenza $R_4 - R_2$. Per la seconda matrice sostituendo C_4 con $C_4 + C_1$ e sviluppando lungo C_4 trovi -8; un'altra strategia efficace è prendere al posto di R_3 la differenza $R_3 - R_2$.

Esercizio 9.7 $3(k^2 - 3k - 3), 6k^3 - 14k^2 - 89k - 75$.

Esercizio 9.8 $k + 4 - (k^3 + k^2 + 7k - 3)i, 5k^2 - 2k + 2 + (4k^3 - 9k^2 + k + 3)i$.

Esercizio 9.9 $\det \begin{vmatrix} 5k & k+3 \\ k-1 & k \end{vmatrix} = 4k^2 - 2k + 3$. Questo polinomio non ha radici reali, ma ha le due radici complesse $k = \frac{1 \pm i\sqrt{11}}{4}$, per cui la matrice assegnata è sempre invertibile se $k \in \mathbb{R}$, mentre se $k \in \mathbb{C}$ lo è se e solo se $k \neq \frac{1 \pm i\sqrt{11}}{4}$.

Esercizio 9.10 $\det \begin{vmatrix} k & k+i \\ k-i & k \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ per ogni $k \in \mathbb{C}$.

Esercizio 9.11 Il determinante della prima matrice vale $(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_2 - a_1)$, quello della seconda $(a_4 - a_3)(a_4 - a_2)(a_4 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_2 - a_1)$; quello della terza vale $(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_2 - a_1)(a_1 + a_2 + a_3)$; l'ultimo $(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_2 - a_1)(a_1 + a_2)(a_1 + a_3) \cdot (a_2 + a_3)$. Per calcolare il terzo moltiplica la prima riga per a_1 e sottraila alla seconda e moltiplica la seconda riga per a_1^2 e sottraila alla terza, mentre per l'ultimo la prima riga per a_1^2 e sottraila alla seconda e moltiplica la seconda riga per a_1 e sottraila alla terza. La formula per matrici $n \times n$ che generalizza quella ottenuta per la prima e la seconda matrice è

$$(a_n - a_{n-1})(a_n - a_{n-2}) \cdots (a_n - a_1) \cdots (a_2 - a_1) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

Esercizio 9.13 $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}.$

Esercizio 9.14 $C = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$

Esercizio 9.15 Applicando ripetutamente l'omogeneità in ciascuna colonna fissate le altre trovi

$$\det \begin{vmatrix} \lambda A_1 & \lambda A_2 & \cdots & \lambda A_n \end{vmatrix} = \lambda \det \begin{vmatrix} A_1 & \lambda A_2 & \cdots & \lambda A_n \end{vmatrix} = \lambda^2 \det \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & \lambda A_n \end{vmatrix} \\ = \cdots = \lambda^n \det \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{vmatrix}.$$

Esercizio 9.16 $\det A = \det A^T = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A$, per cui $\det A = 0$.

Esercizio 9.17 Se $i = j$ la quantità data è lo sviluppo di Laplace del determinante di A lungo la i -esima riga. Se $i \neq j$, è lo sviluppo di Laplace del determinante di una matrice ottenuta sostituendo alla j -esima riga della matrice A , la i -esima riga di A ; si tratta quindi di una matrice con la i -esima e la j -esima riga uguali e pertanto il suo determinante è nullo.

Esercizio 9.19 Determinante $\frac{1}{6048000} = \frac{1}{2^8 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7} \neq 0$, inversa $\begin{vmatrix} 16 & -120 & 240 & -140 \\ -120 & 120 & -2700 & 1680 \\ 240 & -2700 & 6480 & -4200 \\ -140 & 1680 & -4200 & 2800 \end{vmatrix}.$

Esercizio 9.20 $x = \frac{7}{22}, y = \frac{17}{44}, z = -\frac{15}{44}; x = 3, y = 2, z = 0; x = 885781, y = -887112.$

Esercizio 9.21 $\det \begin{vmatrix} 2k & k-2 \\ k+1 & 3k \end{vmatrix} = 5k^2 + k + 2 \neq 0$ per ogni $k \in \mathbb{R}$. La soluzione è $x = \frac{2k^2+3k-2}{5k^2+k+2}, y = \frac{k(k-3)}{5k^2+k+2}.$

Esercizio 9.22 Il determinante della matrice incompleta vale $-3k^2 + 3k - 1 \neq 0$ per ogni $k \in \mathbb{R}$. La soluzione è $x = \frac{2(k^3-5k^2-2k+2)}{3k^2-3k+1}, y = \frac{4k^3-15k^2+5k-3}{3k^2-3k+1}, z = \frac{2k(k^2-3k-5)}{3k^2-3k+1}.$

Esercizio 9.23 Il determinante della matrice incompleta vale $-9 + 3i \neq 0$ per ogni $k \in \mathbb{C}$. La soluzione è $x = -\frac{3+i}{30}(5k^2 + (14-4i)k + 22-11i), y = \frac{1-3i}{30}(5k^2 - (1-i)k - 3-6i).$

Esercizio 9.24 Ha determinante $-144 \neq 0$ per ogni $k \in \mathbb{C}$;

$$x = \frac{1}{144}[-(3k^2 + 172k + 481) + (63k^2 + 639k + 350)i], \\ y = \frac{1}{144}[7k^2 + 396k + 845 - (147k^2 + 1283k + 646)i], \\ z = \frac{3}{144}[k^2 + 58k + 177 - (21k^2 + 227k + 126)i].$$

Esercizio 9.25 Se A è la matrice nulla, allora S è l'applicazione identicamente nulla e quindi $\det S = 0$; se invece A è una matrice non nulla allora $A \in \text{Ker } S$ e quindi $\det S = 0$ perché $\text{Ker } S$ contiene una matrice non nulla e pertanto non è invertibile. Prendendo come base di $M_{n,n}(\mathbb{R})$ la

base delle matrici elementari, la matrice associata a T è la matrice a blocchi $\begin{vmatrix} A & O & \cdots & O \\ O & A & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & O \\ O & \cdots & O & A \end{vmatrix},$

quindi applicando l'Esercizio 9.12, si ottiene che $\det T = (\det A)^n$.

26 Soluzioni degli esercizi

Esercizio 9.26 Il nucleo di T contiene tutti i polinomi costanti, quindi l'endomorfismo non è invertibile e pertanto $\det T = 0$.

Esercizio 9.27 $\det T = (1 + i)^4 = -4$.

Esercizio 9.29 La prima matrice ha rango 2 per $t = 0$, altrimenti ha rango 3; la seconda ha rango 2 per $t = 0$, altrimenti ha rango 3; la terza ha rango 2 per $t = \pm 1$, altrimenti ha rango 3.

Esercizio 9.30 Il rango della matrice assegnata vale 5, infatti prendendo tutte e cinque le righe e scartando la prima e l'ultima colonna si ottiene una matrice 5×5 con determinante non nullo.

10 Esercizi del Capitolo 10: Geometria affine

Esercizio 10.2 Il punto $A^{-1}b \in \mathbb{R}^3$.

Esercizio 10.3 La prima retta ha vettore direttore $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, la seconda retta ha vettore direttore $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$; essendo $v_1 = -2v_0$ le due rette sono parallele o coincidenti. Ma il punto $P_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}$ appartiene a entrambe le rette (si ottiene prendendo $t = 3$ e $s = 0$), per cui le due rette sono coincidenti, cioè i due insiemi di equazioni parametriche descrivono la stessa retta. Si giunge alla stessa conclusione anche notando che $\operatorname{rg} \begin{vmatrix} v_0 & v_1 \end{vmatrix} = 1 = \operatorname{rg} \begin{vmatrix} v_0 & v_1 & P_0 - P_1 \end{vmatrix}$, dove $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Esercizio 10.8 I tre punti sono allineati se e solo se esistono $v \in \mathbb{R}^2$ e $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tali che $P_j - P_0 = t_j v$ per $j = 1, 2$, cioè se e solo se la matrice $\begin{vmatrix} P_1 - P_0 & P_2 - P_0 \end{vmatrix}$ ha rango minore di 2; le coordinate di $P_j - P_0$ sono $\begin{pmatrix} x_j - x_0 \\ y_j - y_0 \end{pmatrix}$, quindi $\det \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix} = 0$ se e solo se i tre punti sono allineati.

Esercizio 10.9 I tre punti sono allineati se e solo se esistono $v \in \mathbb{R}^3$ e $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tali che $P_j - P_0 = t_j v$ per $j = 1, 2$, cioè se e solo se la matrice $\begin{vmatrix} P_1 - P_0 & P_2 - P_0 \end{vmatrix}$ ha rango minore di 2; poiché le coordinate di $P_j - P_0$ sono $\begin{pmatrix} x_j - x_0 \\ y_j - y_0 \\ z_j - z_0 \end{pmatrix}$, segue subito la conclusione.

Esercizio 10.11 Se $x_1 = x_0$, non si può applicare il teorema degli orlati per imporre che il rango di $\begin{vmatrix} l & x_1 - x_0 \\ m & y_1 - y_0 \\ n & z_1 - z_0 \end{vmatrix}$ valga 1 orlando la matrice 1×1 avente come unico elemento $x_1 - x_0$ perché questa non ha determinante diverso da 0, quindi il sistema 10.16 non è equivalente alla richiesta che il rango della matrice sia uguale a 1. Bisogna utilizzare lo stesso procedimento riferito a un'altra componente dei due punti diversa da P_0 a P_1 , e certamente una almeno lo è in quanto sono distinti, e procedere utilizzando la stessa strategia riferita a quella.

Esercizio 10.12 La retta passante per P_0 e P_1 ha equazioni parametriche $P = P_0 + t(P_1 - P_0)$, cioè $\begin{cases} x = \pi, \\ y = 1 - t, \\ z = 3 - t, \end{cases}$ come affermato. Procedendo come nel Paragrafo 6.5 troviamo le equazioni cartesiane $\begin{cases} x = \pi, \\ y - z = -2. \end{cases}$

Esercizio 10.13 Equazioni cartesiane $\begin{cases} 3x + y + z = 8, \\ 2x + y + z = 8; \end{cases}$ equazioni parametriche $\begin{cases} x = 0, \\ y = t + 7, \\ z = t + 1. \end{cases}$

Esercizio 10.14 Se P_0, P_1 e P_2 sono allineati, allora P_0, P_1, P_2 e P_3 sono certamente complanari, e la matrice $\begin{vmatrix} P_1 - P_0 & P_2 - P_0 & P_3 - P_0 \end{vmatrix}$ indicata ha le prime due colonne linearmente dipendenti per cui ha automaticamente determinante nullo. Se invece P_0, P_1 e P_2 non sono allineati, il piano π passante per essi ha equazione parametrica $P = P_0 + s(P_1 - P_0) + t(P_2 - P_0)$. In questo caso i quattro punti P_0, P_1, P_2, P_3 sono complanari se e solo se $P_3 \in \pi$, cioè se e solo se esistono $s_0, t_0 \in \mathbb{R}$ tali che $P_3 = P_0 + s_0(P_1 - P_0) + t_0(P_2 - P_0)$ o, equivalentemente, tali che $P_3 - P_0 = s_0(P_1 - P_0) + t_0(P_2 - P_0)$. Ma questo accade se e solo se $P_3 - P_0, P_2 - P_0$ e $P_1 - P_0$ sono linearmente dipendenti, e quindi se e solo se $\det \begin{vmatrix} P_1 - P_0 & P_2 - P_0 & P_3 - P_0 \end{vmatrix} = 0$, come affermato.

Esercizio 10.15 Equazione cartesiana $x - y - z + 1 = 0$; equazioni parametriche $\begin{cases} x = t + s - 1, \\ y = t, \\ z = s. \end{cases}$

Esercizio 10.18 In entrambe le tabelle, l'impossibilità della prima riga è dovuta al fatto che aggiungendo una colonna il rango può crescere al massimo di 1; quella nella seconda riga è dovuta al fatto che aggiungendo una riga il rango non può decrescere.

Esercizio 10.19 Abbiamo $v_0 = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix}, P_0 = \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix}, v_1 = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ e $P_1 = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix}$; quindi $\text{rg} \begin{vmatrix} v_0 & v_1 \end{vmatrix} = 2$ e $\text{rg} \begin{vmatrix} v_0 & v_1 & P_0 - P_1 \end{vmatrix} = 3$, per cui r_0 e r_1 sono sghembe.

Esercizio 10.21 Ponendo $A_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, b_0 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}, A_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}, b_1 = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix}$, le equazioni cartesiane delle due rette divengono $A_0x = b_0$ e $A_1x = b_1$. Siccome $\text{rg} \begin{vmatrix} A_0 \\ A_1 \end{vmatrix} = 3$ e $\text{rg} \begin{vmatrix} A_0 & b_0 \\ A_1 & b_1 \end{vmatrix} = 4$, le due rette sono sghembe.

Esercizio 10.22 Il sistema $\begin{cases} 2x + 3y - z = 4, \\ x + y = 0, \\ x - z = 1, \end{cases}$ ammette come unica soluzione $P_0 = \begin{vmatrix} -3/2 \\ 3/2 \\ -5/2 \end{vmatrix}$; quindi π e r sono incidenti, e si intersecano nel punto P_0 .

Esercizio 10.23 Equazione cartesiana $x - y - z = 0$, equazioni parametriche $\begin{cases} x = t + s, \\ y = t, \\ z = s. \end{cases}$

Esercizio 10.24 Equazione cartesiana $3x - y - 2z = 0$, equazioni parametriche $\begin{cases} x = t, \\ y = 3t - 2s, \\ z = s. \end{cases}$

Esercizio 10.28 Siccome

$$\det \begin{vmatrix} A'_1 - O' & A'_2 - O' & A'_3 - O' \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad \text{e} \quad \det \begin{vmatrix} A''_1 - O'' & A''_2 - O'' & A''_3 - O'' \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

le quaterne di punti $\{O', A'_1, A'_2, A'_3\}$ e $\{O'', A''_1, A''_2, A''_3\}$ sono non complanari (vedi l'Esercizio 10.10), e quindi $\mathcal{R}'$ e $\mathcal{R}''$ sono dei riferimenti affini. La matrice di cambiamento di coordinate affini B' da $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}_0$ è $B' = \begin{vmatrix} A'_1 - O' & A'_2 - O' & A'_3 - O' \end{vmatrix}$ che abbiamo visto avere determinante negativo; quindi $\mathcal{R}_0$ e $\mathcal{R}'$ hanno orientazione opposta. Analogamente, la matrice B'' di cambiamento di coordinate affini da $\mathcal{R}''$ a $\mathcal{R}_0$ è $B'' = \begin{vmatrix} A''_1 - O'' & A''_2 - O'' & A''_3 - O'' \end{vmatrix}$, anch'essa con determinante negativo; quindi anche $\mathcal{R}_0$ e $\mathcal{R}''$ hanno orientazione opposta, e di conseguenza $\mathcal{R}'$ e $\mathcal{R}''$ hanno la stessa orientazione. La matrice B di cambiamento di coordinate affini da $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}''$ è

$$B = (B'')^{-1} B' = \begin{vmatrix} 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1/6 & -2/3 & -1/6 \\ -5/6 & 1/3 & -1/6 \end{vmatrix}$$

(che ha determinante uguale a $1/6$, confermando il fatto che $\mathcal{R}'$ e $\mathcal{R}''$ hanno la stessa orientazione).

Siccome $O'' - O' = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, la formula di cambiamento di coordinate affini da $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}''$ è

$$\begin{cases} x_1'' = \frac{1}{3}x_1' - \frac{1}{3}x_2' - \frac{1}{3}x_3' - 1, \\ x_2'' = \frac{1}{6}x_1' - \frac{2}{3}x_2' - \frac{1}{6}x_3' + 2, \\ x_3'' = -\frac{5}{6}x_1' + \frac{1}{3}x_2' - \frac{1}{6}x_3' - 1. \end{cases}$$

11 Esercizi del Capitolo 11: Prodotti scalari ed hermitiani

Esercizio 11.1 La prima e la quarta applicazione non sono prodotti scalari, le altre sì. Le matrici richieste sono

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 400 & 0 & 3\sqrt{\pi} \\ 0 & 0 & 0 \\ 3\sqrt{\pi} & 0 & 227 \end{vmatrix}.$$

$\langle, \rangle_2$ è definito positivo, $\langle, \rangle_3$ è indefinito e non degenere, $\langle, \rangle_5$ è semidefinito negativo, $\langle, \rangle_6$ è indefinito e degenere, $\langle, \rangle_7$ è semidefinito positivo.

Esercizio 11.3 È una forma bilineare: infatti se $p_1, p_2, p, q_1, q_2, q \in \mathbb{R}_n[t]$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\begin{aligned} \langle p_1 + p_2, q \rangle &= (p_1 + p_2)(0)q(0) + \cdots + (p_1 + p_2)(n)q(n) \\ &= (p_1(0) + p_2(0))q(0) + \cdots + (p_1(n) + p_2(n))q(n) \\ &= (p_1(0)q(0) + \cdots + p_1(n)q(n)) + (p_2(0)q(0) + \cdots + p_2(n)q(n)) \\ &= \langle p_1, q \rangle + \langle p_2, q \rangle, \\ \langle p, q_1 + q_2 \rangle &= p(0)(q_1(0) + q_2(0)) + \cdots + p(n)(q_1(n) + q_2(n)) \\ &= p(0)(q_1(0) + q_2(0)) + \cdots + p(n)(q_1(n) + q_2(n)) \\ &= (p(0)q_1(0) + \cdots + p(n)q_1(n)) + (p(0)q_2(0) + \cdots + p(n)q_2(n)) \\ &= \langle p, q_1 \rangle + \langle p, q_2 \rangle, \\ \langle \lambda p, q \rangle &= (\lambda p)(0)q(0) + \cdots + (\lambda p)(n)q(n) = \lambda p(0)q(0) + \cdots + \lambda p(n)q(n) \\ &= \lambda(p(0)q(0) + \cdots + p(n)q(n)) = \lambda \langle p, q \rangle, \\ \langle p, \lambda q \rangle &= p(0)(\lambda q(0)) + \cdots + p(n)(\lambda q(n)) = p(0)\lambda q(0) + \cdots + p(n)\lambda q(n) \\ &= \lambda(p(0)q(0) + \cdots + p(n)q(n)) = \lambda \langle p, q \rangle. \end{aligned}$$

È simmetrica:

$$\langle q, p \rangle = q(0)p(0) + \cdots + q(n)p(n) = p(0)q(0) + \cdots + p(n)q(n) = \langle p, q \rangle$$

(nota che se avessimo verificato prima la simmetria avremmo potuto risparmiarci due delle quattro verifiche della bilinearità). Infine, $\langle p, p \rangle = p(0)^2 + \cdots + p(n)^2 \geq 0$ sempre, e $\langle p, p \rangle = 0$ se e solo se $0, \dots, n$ sono radici del polinomio p ; ma l'unico polinomio di grado al più n con $n+1$ radici è il polinomio nullo, per cui $\langle p, p \rangle = 0$ se e solo se $p \equiv 0$, e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è definito positivo.

Esercizio 11.4 Essendo un polinomio omogeneo di grado 1 in v_1 e v_2 è lineare nella prima variabile. Inoltre

$$\langle w, v \rangle_1 = 2w_1\overline{v_1} + 2iw_1\overline{v_2} - 2iw_2\overline{v_1} + 4w_2\overline{v_2} = \overline{2v_1\overline{w_1} + 2iv_1\overline{w_2} - 2iv_2\overline{w_1} + 4v_2\overline{w_2}} = \overline{\langle v, w \rangle_1},$$

per cui è hermitiano e quindi risulta una forma sesquilineare. Siccome

$$\begin{aligned} \langle v, v \rangle_1 &= 2|v_1|^2 + 2iv_1\overline{v_2} - 2iv_2\overline{v_1} + 4|v_2|^2 \\ &= 2(|v_1|^2 - 2\operatorname{Im}(v_1\overline{v_2}) + |v_2|^2) = 2(|v_1|^2 - 2\operatorname{Im}(v_1\overline{v_2}) + |v_2|^2) \geq 0 \end{aligned}$$

per ogni $v_1, v_2 \in \mathbb{C}$ e $\langle v, v \rangle_1 = 0$ sse $v_1 = v_2 = 0$, è definito positivo. Invece $\langle, \rangle_2$ è semidefinito positivo in quanto la disuguaglianza $\langle v, v \rangle_2 = 2(|v_1|^2 - 2\operatorname{Im}(v_1\overline{v_2}) + |v_2|^2) \geq 0$ per ogni $v_1, v_2 \in \mathbb{C}$ continua a valere, ma il vettore v di componenti $v_1 = 1, v_2 = -i$ verifica $\langle v, v \rangle_2 = 0$.

Esercizio 11.5

$$\begin{aligned}\langle \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2, q \rangle &= (\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)(0)\overline{q(0)} + (\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)(1)\overline{q(1)} + (\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)(i)\overline{q(i)} \\ &= \lambda_1 p_1(0)\overline{q(0)} + \lambda_1 p_1(1)\overline{q(1)} + \lambda_1 p_1(i)\overline{q(i)} \\ &\quad + \lambda_2 p_2(0)\overline{q(0)} + \lambda_2 p_2(1)\overline{q(1)} + \lambda_2 p_2(i)\overline{q(i)} = \lambda_1 \langle p_1, q \rangle + \lambda_2 \langle p_2, q \rangle\end{aligned}$$

per ogni $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ e $p_1, p_2, q \in \mathbb{C}_2[t]$. Inoltre

$$\langle q, p \rangle = q(0)\overline{p(0)} + q(1)\overline{p(1)} + q(i)\overline{p(i)} = \overline{p(0)\overline{q(0)} + p(1)\overline{q(1)} + p(i)\overline{q(i)}} = \overline{\langle p, q \rangle}$$

e quindi si tratta di un prodotto hermitiano. Infine $\langle p, p \rangle = |p(0)|^2 + |p(1)|^2 + |p(i)|^2 \geq 0$ e $\langle p, p \rangle = 0$ se e solo se il polinomio p si annulla in 0, 1 e i , dato che il suo grado vale al massimo 2 ciò può accadere solo se è il polinomio nullo.

Esercizio 11.6

$$\begin{aligned}\langle A_1 + A_2, B \rangle &= \text{tr}(B^T P(A_1 + A_2)) = \text{tr}(B^T P A_1 + B^T P A_2) = \text{tr}(B^T P A_1) + \text{tr}(B^T P A_2) \\ &= \langle A_1, B \rangle + \langle A_2, B \rangle\end{aligned}$$

per ogni $A_1, A_2, B \in M_{2,2}(\mathbb{R})$.

$$\langle \lambda A, B \rangle = \text{tr}(B^T P(\lambda A)) = \lambda \text{tr}(B^T P A) = \lambda \langle A, B \rangle$$

per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e $A, B \in M_{2,2}(\mathbb{R})$.

$$\langle B, A \rangle = \text{tr}(A^T P B) = \text{tr}((A^T P B)^T) = \text{tr}(B^T P^T A) = \text{tr}(B^T P A) = \langle A, B \rangle$$

per ogni $A, B \in M_{2,2}(\mathbb{R})$, quindi si tratta di un prodotto scalare. Inoltre se $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ allora $\langle A, A \rangle = \text{tr}(A^T P A) = a^2 + 2ac + 2c^2 + b^2 + 2bd + 2d^2 = (a+c)^2 + c^2 + (b+d)^2 + d^2 \geq 0$. Se poi $\langle A, A \rangle = 0$ allora $a+c = c = b+d = d = 0$ e quindi $A = O$, pertanto si tratta di un prodotto scalare definito positivo.

Esercizio 11.8 Grazie all'additività nella prima e nella seconda variabile e alla simmetria, per ogni $v, w \in V$ hai

$$\begin{aligned}\langle v+w, v+w \rangle &= \langle v, v+w \rangle + \langle w, v+w \rangle = \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + 2\langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle,\end{aligned}$$

da cui l'uguaglianza richiesta.

Esercizio 11.9 Grazie all'additività nella prima e nella seconda variabile e alla hermitianità, per ogni $v, w \in V$ hai

$$\begin{aligned}\langle v+w, v+w \rangle &= \langle v, v+w \rangle + \langle w, v+w \rangle = \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \overline{\langle v, w \rangle} + \langle w, w \rangle = \langle v, v \rangle + 2\text{Re}\langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle,\end{aligned}$$

da cui la prima uguaglianza richiesta. Analogamente

$$\begin{aligned}\langle v+iw, v+iw \rangle &= \langle v, v+iw \rangle + i\langle w, v+iw \rangle = \langle v, v \rangle - i\langle v, w \rangle + i\langle w, v \rangle + i \cdot (-i)\langle w, w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle - i\langle v, w \rangle + i\overline{\langle v, w \rangle} + \langle w, w \rangle = \langle v, v \rangle + i(\overline{\langle v, w \rangle} - \langle v, w \rangle) + \langle w, w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + i(-2i\text{Im}\langle v, w \rangle) + \langle w, w \rangle = \langle v, v \rangle + 2\text{Im}\langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle.\end{aligned}$$

Esercizio 11.11 Si ha

$$\begin{aligned}\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 &= \langle v+w, v+w \rangle + \langle v-w, v-w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle + \langle v, v \rangle - \langle v, w \rangle - \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= 2(\|v\|^2 + \|w\|^2).\end{aligned}$$

Il parallelogramma di vertici O, v, w e $v+w$ ha due lati lunghi $\|v\|$, due lati lunghi $\|w\|$, e le due diagonali lunghe rispettivamente $\|v+w\|$ e $\|v-w\|$; quindi questa uguaglianza dice che la somma delle aree dei quadrati costruiti sulle diagonali di un parallelogramma è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui lati.

30 Soluzioni degli esercizi

Esercizio 11.12 Una base ortonormale per $\langle, \rangle_2$ è $\frac{e_2}{\sqrt{3}}, \frac{e_3}{\sqrt{\pi}}, \frac{3e_1+e_2}{\sqrt{6}}$.

Esercizio 11.13 $\langle \frac{v_i}{\|v_i\|}, \frac{v_j}{\|v_j\|} \rangle = \frac{1}{\|v_i\|} \langle v_i, \frac{v_j}{\|v_j\|} \rangle = \frac{1}{\|v_i\|\|v_j\|} \langle v_i, v_j \rangle$. Se $i = j$ questa quantità vale $\frac{1}{\|v_i\|^2} \langle v_i, v_i \rangle = 1$, se invece $i \neq j$ trovi 0.

Esercizio 11.14 Applicando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt ai tre generatori di V otteniamo

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(\left\langle \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$w'_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} - \left(\left\langle \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) - \left(\left\langle \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Il fatto che $w'_3 = 0$ significa che il terzo generatore di V si ottiene come combinazione lineare degli altri due; quindi $\dim V = 2$, una sua base ortogonale è data da $\{w_1, w_2\}$, e una base ortonormale è data da $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ con

$$u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 0 \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

Per completare $\mathcal{B}$ a una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt ai vettori $\{u_1, u_2, e_3, e_4\}$: ricordando che $\|u_1\| = \|u_2\| = 1$ otteniamo

$$w_3 = e_3 - \langle e_3, u_1 \rangle u_1 - \langle e_3, u_2 \rangle u_2 = \begin{bmatrix} -1/4 \\ 1/4 \\ 3/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}, \quad w_4 = e_4 - \langle e_4, u_1 \rangle u_1 - \langle e_4, u_2 \rangle u_2 - \frac{\langle e_4, w_3 \rangle}{\langle w_3, w_3 \rangle} w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix};$$

il fatto di non aver ottenuto vettori nulli ci conferma che $\{u_1, u_2, e_3, e_4\}$ era una base di $\mathbb{R}^4$. Quindi $\{u_1, u_2, w_3, w_4\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$, e una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ che completa $\{u_1, u_2\}$ è $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dove

$$u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \begin{bmatrix} -1/(2\sqrt{3}) \\ 1/(2\sqrt{3}) \\ \sqrt{3}/2 \\ 1/(2\sqrt{3}) \end{bmatrix}, \quad u_4 = \frac{w_4}{\|w_4\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Esercizio 11.15 Se $v \in V$ è ortogonale a U allora è ortogonale a ogni elemento di U , in particolare a u_j per $j = 1, \dots, r$. Viceversa, se $v \perp u_j$ per $j = 1, \dots, r$, preso $u \in U$, esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ tali che $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r$. Pertanto

$$\langle u, v \rangle = \langle \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r, v \rangle = \alpha_1 \langle u_1, v \rangle + \dots + \alpha_r \langle u_r, v \rangle = 0$$

e quindi v è ortogonale a ogni elemento di U .

Esercizio 11.18

$$\begin{aligned} g(x, y) &= g(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n, y_1 e_1 + \dots + y_n e_n) \\ &= x_1 g(e_1, y_1 e_1 + \dots + y_n e_n) + \dots + x_n g(e_n, y_1 e_1 + \dots + y_n e_n) \\ &= x_1 y_1 g(e_1, e_1) + \dots + x_1 y_n g(e_1, e_n) + \dots + x_n y_1 g(e_n, e_1) + \dots + x_n y_n g(e_n, e_n) \\ &= y^T S x, \end{aligned}$$

dove $S \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ è tale che nel posto (i, j) compare $g(e_j, e_i)$.

Esercizio 11.20 La matrice è $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Esercizio 11.23 Sia P la proiezione ortogonale sul sottospazio $U = \text{Im } P$. Dati $v, w \in V$, scriviamo $v = P(v) + (v - P(v))$ e $w = P(w) + (w - P(w))$. Per definizione di proiezione ortogonale, $v - P(v)$ e $w - P(w)$ sono ortogonali a tutti gli elementi di U , e quindi in particolare sono ortogonali a $P(v)$ e $P(w)$; quindi

$$\begin{aligned}\langle P(v), w \rangle &= \langle P(v), P(w) + (w - P(w)) \rangle = \langle P(v), P(w) \rangle \\ &= \langle P(v) + (v - P(v)), P(w) \rangle = \langle v, P(w) \rangle,\end{aligned}$$

per cui P è autoaggiunto.

Esercizio 11.24 La matrice che rappresenta P_U rispetto a $\mathcal{B}$ è $\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O_{n-r} \end{bmatrix}$, dove $\dim V = n$ e $\dim U = r$ perché su U la proiezione P_U coincide su U con l'identità e su $U^\perp$ con l'applicazione nulla. Notiamo poi che la matrice $B^T B$ è la matrice associata alla restrizione del prodotto scalare su U rispetto alla base $\mathcal{B}_1$. Dato un vettore $u \in U$ e indicate con x le sue coordinate rispetto a $\mathcal{B}_0$, si ha che $B^T x$ contiene i prodotti scalari dei vettori della base $\mathcal{B}_1$ con u e quindi la matrice $P = B(B^T B)^{-1} B^T$ sulle coordinate rispetto a $\mathcal{B}_0$ dei vettori di U agisce lasciandole invariate. Dato invece un vettore $w \in U^\perp$ e indicate con y le sue coordinate rispetto a $\mathcal{B}_0$, si ha che $B^T y = 0$ e quindi la matrice $P = B(B^T B)^{-1} B^T$ sulle coordinate rispetto a $\mathcal{B}_0$ dei vettori di $U^\perp$ agisce annullandole. Pertanto P agisce sia sulle coordinate dei vettori di U sia su quelle dei vettori di $U^\perp$ come voluto e quindi è la matrice che rappresenta P_U rispetto alla base $\mathcal{B}_0$. Nel caso complesso il ragionamento è analogo.

Esercizio 11.25

$$\begin{aligned}\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w \rangle_T &= \langle T(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2), w \rangle = \langle \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2), w \rangle \\ &= \lambda_1 \langle T(v_1), w \rangle + \lambda_2 \langle T(v_2), w \rangle = \lambda_1 \langle v_1, w \rangle_T + \lambda_2 \langle v_2, w \rangle_T\end{aligned}$$

per ogni $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) e ogni $v_1, v_2, w \in V$. Inoltre, se siamo sul campo reale, abbiamo $\langle w, v \rangle_T = \langle T(w), v \rangle = \langle T(v), w \rangle = \langle v, w \rangle_T$ per ogni $v, w \in V$ grazie al fatto che T è autoaggiunto, pertanto è un prodotto scalare; il caso complesso è analogo. Infine se $\langle v, w \rangle_T = 0$ per ogni $w \in V$, allora $\langle T(v), w \rangle = 0$ per ogni $w \in V$ e pertanto $T(v) = 0$; il nucleo di $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$ coincide quindi con $\text{Ker } T$, da cui segue che $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$ è non degenere se e solo se T è invertibile.

Esercizio 11.26 Per ogni $v, w \in V$ hai

$$\langle (T_1 \circ T_2)(v), (T_1 \circ T_2)(w) \rangle = \langle T_1(T_2(v)), T_1(T_2(w)) \rangle = \langle T_2(v), T_2(w) \rangle = \langle v, w \rangle,$$

dove la prima uguaglianza è frutto della definizione di composizione di applicazioni, mentre la seconda e la terza sono dovute al fatto che T_1 (rispettivamente T_2) è un endomorfismo ortogonale, cioè un'isometria. Analogamente $\langle T_1^{-1}(v), T_1^{-1}(w) \rangle = \langle T_1 \circ T_1^{-1}(v), T_1 \circ T_1^{-1}(w) \rangle = \langle \text{id}_V(v), \text{id}_V(w) \rangle = \langle v, w \rangle$, dove la prima uguaglianza viene dal fatto che T_1 è un endomorfismo ortogonale, cioè un'isometria; la seconda dal fatto che $T_1 \circ T_1^{-1} = \text{id}_V$ e la terza dalla definizione di id_V .

Esercizio 11.27 Dato che $I_n^{-1} = I_n = I_n^T$, la matrice I_n è ortogonale. Se $A \in O(n)$, allora $A^{-1} = A^T$, prendendo l'inversa di ambo i membri e ricordando che $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ ottieni che $(A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^T$ e quindi anche $A^{-1} \in O(n)$. Se poi $A, B \in O(n)$ allora $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^T A^T = (AB)^T$ e quindi $O(n)$ è un gruppo. Se $n > 1$, basta con-

siderare le matrici $\begin{bmatrix} 0 & 1 & O \\ -1 & 0 & O \\ O & O & I_{n-2} \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 & O \\ 0 & -1 & O \\ O & O & I_{n-2} \end{bmatrix}$, entrambe ortogonali, per verificare che il prodotto non è commutativo.

Esercizio 11.29 Infatti $1 = \det I_n = \det(AA^T) = \det(A)\det(A^T) = \det(A)^2$, dove abbiamo usato il Teorema di Binet e il Corollario 9.7, da cui $|\det A| = 1$. Il caso complesso è analogo.

Esercizio 11.30 Siccome $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ sono due basi, esiste un'unica matrice $B \in GL(n, \mathbb{R})$ tale che $Bv_j = w_j$ per $j = 1, \dots, n$ (Proposizioni 5.2 e 7.4). Siccome le due basi sono ortonormali, L_B è un'isometria (Proposizione 11.17), e quindi B è una matrice ortogonale (Corollario 11.19).

Esercizio 11.31 Grazie alla forma del prodotto scalare canonico per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ hai $\langle L_A(x), y \rangle = y^T A x$, mentre $\langle x, L_{A^T}(y) \rangle = (A^T y)^T x = y^T (A^T)^T x = y^T A x$.

12 Esercizi del Capitolo 12: Geometria euclidea

Esercizio 12.4 $\cos(\widehat{r_0 r_1}) = \pm \frac{8}{7\sqrt{3}}.$

Esercizio 12.5 A seconda dell'orientazione scelta il coseno vale $\pm \frac{1}{3\sqrt{3}}.$

Esercizio 12.6 $\cos(\widehat{r_0 r_1}) = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}.$

Esercizio 12.7 Le rette hanno equazioni parametriche $\begin{cases} x = lt, \\ y = 1 + mt, \\ z = -(l + m)t; \end{cases}$ le equazioni cartesiane sono $\begin{cases} (l + m)x + lz = 0, \\ mx - l(y - 1) = 0, \end{cases}$ se $l \neq 0$ e $\begin{cases} x = 0, \\ y + z = 1. \end{cases}$ Il piano ha equazione cartesiana $x + y + z = 1$ ed equazioni parametriche $\begin{cases} x = t, \\ y = s, \\ z = 1 - t - s. \end{cases}$

Esercizio 12.8 Un'equazione cartesiana è $3x - 7y + z = 21$; delle possibili equazioni parametriche sono $\begin{cases} x = s, \\ y = t, \\ z = -3s + 7t + 21. \end{cases}$

Esercizio 12.9 Equazione parametriche $\begin{cases} x = 3 + t, \\ y = 6 - 5t, \\ z = 2t - 11. \end{cases}$, cartesiana $\begin{cases} 5x + y = 21, \\ 2x - z = 17. \end{cases}$

Esercizio 12.10 Possibili equazioni cartesiane sono $\begin{cases} x + 3y - 4z = -20, \\ 8x + y - 3z = -10; \end{cases}$ possibili equazioni parametriche sono $\begin{cases} x = \frac{1}{23}(5t - 10), \\ y = \frac{1}{23}(29t - 150), \\ z = t. \end{cases}$

Esercizio 12.11 $\cos(\widehat{\pi_0 \pi_1}) = \pm \frac{1}{3}.$

Esercizio 12.12 A seconda dell'orientazione scelta il coseno vale $\pm \frac{11}{3\sqrt{21}}.$

Esercizio 12.13 $\cos(\widehat{\pi_0 \pi_1}) = \pm \frac{5}{3\sqrt{143}}.$

Esercizio 12.14 $\sqrt{\frac{2}{3}}.$

Esercizio 12.15 Esiste sempre un piano parallelo a entrambe, mentre non esiste mai un piano ortogonale a entrambe.

Esercizio 12.16 Equazioni parametriche $\begin{cases} x = 1, \\ y = 1 + t, \\ z = 1 + 3t; \end{cases}$ equazioni cartesiane $\begin{cases} x = 1, \\ 3y - z = 2. \end{cases}$

Esercizio 12.17 $d(P_0, r_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}; d(P_0, r_1) = \frac{\sqrt{6}}{3}; d(P_0, \pi_0) = \frac{\sqrt{3}}{3}; d(P_0, \pi_1) = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$

Esercizio 12.18 $\frac{\sqrt{97}}{4}.$

Esercizio 12.19 No, perché la distanza di P_0 dal piano è $\frac{20}{\sqrt{62}}$, la distanza di P_0 dall'origine è $\sqrt{29}$, e si ha $\sqrt{29} > \frac{20}{\sqrt{62}}$ in quanto $29 \cdot 62 > 400$.

Esercizio 12.20 $d(r_0, r_1) = \frac{\sqrt{2}}{3}.$

Esercizio 12.21 $\frac{14}{\sqrt{17}}.$

Esercizio 12.22 Equazione cartesiana $x - 2y - z = 0$, equazione parametrica $x = 2t + s, y = t, z = s.$

Esercizio 12.24 $d(r_1, s) = \frac{1}{\sqrt{91}}$.

Esercizio 12.26 $\begin{vmatrix} 2-2a \\ a-1 \\ 0 \end{vmatrix}$.

Esercizio 12.27 $S(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \wedge v_0 = \lambda_1 v_1 \wedge v_0 + \lambda_2 v_2 \wedge v_0 = \lambda_1 S(v_1) + \lambda_2 S(v_2)$ per ogni $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$. La linearità di T è conseguenza di quella di S , del fatto che il prodotto scalare canonico è lineare nella prima variabile fissata la seconda e che la somma di applicazioni lineari è lineare. Se $v_0 = O$, sia S sia T sono l'applicazione identicamente nulla, quindi $\text{Ker } S = \text{Ker } T = \mathbb{R}^3$, $\text{Im } S = \text{Im } T = \{O\}$. Se $v_0 \neq O$, allora $\text{Ker } S = \mathbb{R}v_0$, $\text{Im } S = (\mathbb{R}v_0)^\perp$, $\text{Ker } T = \{O\}$ e $\text{Im } T = \mathbb{R}^3$.

13 Esercizi del Capitolo 13: Autovalori e autovettori

Esercizio 13.1 $V_\lambda = \text{Ker}(T - \lambda \text{id}_V)$; siccome $T - \lambda \text{id}_V$ è un endomorfismo lineare, il suo nucleo è un sottospazio vettoriale. Se $V = V_\lambda$, allora $T = \lambda \text{id}_V$.

Esercizio 13.2 A_k è diagonalizzabile se e solo se $k = 0$; B_k è diagonalizzabile se e solo se $k \neq 3$; C_k è diagonalizzabile per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 13.3 A_k è diagonalizzabile se e solo se $k \neq 1$ e $k \neq 3$; B_k è diagonalizzabile se e solo se $k \neq 1$; C_k è diagonalizzabile per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 13.4 La matrice A_k è diagonalizzabile se e solo se $k^3 \neq 1$, cioè se e solo se $k \neq 1$ e $k \neq -\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}i)$; B_k è diagonalizzabile se e solo se $k \neq 1 - i$; C_k è diagonalizzabile se e solo se $k \neq 1$; D_k è diagonalizzabile se e solo se $k \neq -i$.

Esercizio 13.5 A_k è diagonalizzabile se e solo se $k \neq \pm i$; B_k è diagonalizzabile se e solo se $(7 - 2i)k^2 + 6k + 1 \neq 0$ e $(9 - 16i)k^2 + 6k + 1 \neq 0$.

Esercizio 13.6 $p_{A^T}(\lambda) = \det(A^T - \lambda I_n) = \det((A - \lambda I_n)^T) = \det(A - \lambda I_n) = p_A(\lambda)$.
 $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ ha autovettori $e_1, e_1 + e_2$, mentre $A^T = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ ha autovettori $e_2, e_1 - e_2$.

Esercizio 13.8 Rispetto alla base $\{1, t, t^2, t^3\}$ di $\mathbb{R}_3[t]$ l'endomorfismo T è rappresentato dalla matrice $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$. Quindi gli autovalori sono $\{0, 1, 2, 3\}$ e gli autospazi sono $V_0 = \text{Span}(1)$, $V_1 = \text{Span}(t)$, $V_2 = \text{Span}(t^2)$ e $V_3 = \text{Span}(t^3)$.

Esercizio 13.9 Rispetto alla base $\{1, t, t^2, t^3\}$ di $\mathbb{R}_3[t]$ l'endomorfismo T è rappresentato dalla matrice $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. Quindi l'unico autovalore è 0 che ha molteplicità algebrica 4 e geometrica 1, per cui T non è diagonalizzabile. L'autospazio relativo all'autovalore 0 è generato dal polinomio 1.

Esercizio 13.10 Per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 13.11 Rispetto alla base $\left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right\}$ l'endomorfismo T è rappresentato dalla matrice $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \end{vmatrix}$. Gli autovalori di T sono 1 e 9, entrambi con molteplicità algebrica e geometrica 2, per cui T è diagonalizzabile. Una base dell'autospazio relativo all'autovalore 1 è data da $\left\{ \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \right\}$; una base dell'autospazio relativo all'autovalore 9 è data da $\left\{ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right\}$.

Esercizio 13.12 L'unico autovalore dell'endomorfismo T è 0 con molteplicità algebrica 4 e molteplicità geometrica 2 (una base di autovettori è I_2, A), quindi T non è diagonalizzabile.

Esercizio 13.13 Se $T = \lambda_0 \text{id}_V$, la matrice associata a T rispetto a ogni base è data da $\lambda_0 I_n$, dove $n = \dim V$, quindi T è diagonalizzabile. Viceversa, se T è diagonalizzabile e $\text{sp}(T) = \{\lambda_0\}$, allora la molteplicità geometrica dell'unico autovalore λ_0 deve essere uguale a n , cioè $\dim V_{\lambda_0} = n$; pertanto $V_{\lambda_0} = V$ e quindi $T(v) = \lambda_0 v$ per ogni $v \in V$, il che prova che $T = \lambda_0 \text{id}_V$.

Esercizio 13.14 $e_1 + \dots + e_n$ è un autovettore non nullo relativo all'autovalore 1.

Esercizio 13.15 $0 \in \text{sp}(S \circ T)$ se e solo se $\det(S \circ T) = 0$; poiché $\det(S \circ T) = \det S \det T = \det T \det S = \det(T \circ S)$, allora $0 \in \text{sp}(S \circ T)$ se e solo se $0 \in \text{sp}(T \circ S)$. Se $\lambda_0 \neq 0$ appartiene a $\text{sp}(S \circ T)$, sia $v_0 \in V \setminus \{O\}$ tale che $(S \circ T)(v_0) = S(T(v_0)) = \lambda_0 v_0$; allora $T(v_0) \neq O$ e $(T \circ S)(T(v_0)) = T(\lambda_0 v_0) = \lambda_0 T(v_0)$, pertanto $\lambda_0 \in \text{sp}(T \circ S)$; scambiando i ruoli di S e T si ottiene immediatamente anche l'altra inclusione, da cui $\text{sp}(S \circ T) = \text{sp}(T \circ S)$.

Esercizio 13.16 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Esercizio 13.17 Poiché lo spazio $\mathcal{L}(V, V)$ ha dimensione $n \cdot n = n^2$ e gli endomorfismi $\text{id}_V, T, T^2, \dots, T^{n^2}$ sono in tutto $n^2 + 1 > n^2$ esistono $\lambda_0, \dots, \lambda_{n^2} \in \mathbb{K}$ non tutti nulli tali che $\lambda_{n^2} T^{n^2} + \dots + \lambda_1 T + \lambda_0 \text{id}_V = O$. Posto $q(t) = \lambda_{n^2} t^{n^2} + \dots + \lambda_1 t + \lambda_0$, abbiamo individuato un polinomio di grado $\leq n^2$ tale che $q(T) = O$; basta allora prendere $p(t) = t^{n^2 - \deg q} q(t)$ per ottenere il polinomio richiesto.

Esercizio 13.18 Se la matrice associata a T rispetto alla base $\mathcal{B}$ è D diagonale, allora la matrice associata a $p(T)$ rispetto alla stessa base è $p(D)$ che è anch'essa diagonale perché somme e potenze di una matrice diagonale sono ancora diagonali. Il viceversa non è vero perché $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ non è diagonalizzabile, ma $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ lo è.

Esercizio 13.21 $T = L_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dove $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ con $U = \text{Span}(e_1)$.

Esercizio 13.22

Autovalori: $13 \pm \sqrt{170}$; autovettori: $(-11 \pm \sqrt{170})e_1 + 7e_2$.

Autovalori 2 (singolo), 1 (doppio); autovettori: $6e_1 - 4e_2 + e_3; -3e_1 + 2e_3, -2e_1 + e_2$.

Autovalori: $1, \frac{1}{2}(3 \pm i\sqrt{7}) \in \mathbb{C}$; autovettori: $e_1; (-9 \pm i\sqrt{7})e_1 + 2(-3 \pm i\sqrt{7})e_2 + 4e_3$.

Autovalori: -5 (singolo), -1 (doppio); autovettori: $-e_1 - 2e_2 + e_3, -e_1 + e_3, 2e_1 + e_2$.

Autovalori: 2 (singolo), -1 (doppio); autovettori: $-2e_1 - e_2 + e_3, -2e_2 + e_3, e_1$.

Autovalori: 2, 1, 0; autovettori: $e_1 + e_3, e_1 - e_2 + e_3, -e_1 + e_3$.

Autovalori: 1 (molteplicità algebrica 3, geometrica 2); autovettori: e_1, e_2 .

Autovalori: 2 (singolo), 1 (molteplicità algebrica 3, geometrica 2); autovettori: $e_2 + e_3, 2e_2 + e_3, e_1$.

Autovalori: 2, $\pm i, 1$; autovettori: $e_1 + e_3, (-2 \mp i)e_2 + e_4, 2e_1 + 3e_3$.

Autovalori: 2 (molteplicità algebrica 3, geometrica 1); autovettori: e_1 .

La prima, la seconda, la quarta, la quinta e la sesta sono diagonalizzabili su $\mathbb{R}$.

Oltre alle precedenti, la terza e la nona sono diagonalizzabili su $\mathbb{C}$.

Esercizio 13.26 Sia $\tilde{B} \in GL_n(\mathbb{C})$ tale che $A' = \tilde{B}^{-1}A\tilde{B}$, ovvero $\tilde{B}A' = A\tilde{B}$. Posto $\tilde{B} = P + iQ$ con $P, Q \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ allora separando parte reale e parte immaginaria si trova $PA' = AP$ e $QA' = AQ$, per cui $(P + tQ)A' = A(P + tQ)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Basta quindi trovare $t_0 \in \mathbb{R}$ tale che $P + t_0Q$ sia invertibile per ottenere la matrice B cercata. Siccome $p(t) = \det(P + tQ)$ è un polinomio in t di grado al massimo n e $p(i) = \det \tilde{B} \neq 0$, abbiamo che $p(t)$ si annulla al massimo in n valori reali. Preso dunque $t_0 \in \mathbb{R}$ tale che $p(t_0) \neq 0$, allora $B = P + t_0Q \in GL_n(\mathbb{R})$ è una matrice che soddisfa quanto richiesto.

Esercizio 13.27 Dato $v \in V$, si può scrivere $v = v - T(v) + T(v)$. Poiché $T^2 = T$, allora $v - T(v) \in \text{Ker } T = V_0$ e $T(v) \in \text{Ker}(T - \text{id}_V) = V_1$; pertanto $V = V_0 \oplus V_1$ e quindi T è diagonalizzabile.

Esercizio 13.28 Dato $v \in V$, si può scrivere $v = \frac{1}{2}(v + T(v)) + \frac{1}{2}(v - T(v))$. Poiché $T^2 = \text{id}_V$, allora $\frac{1}{2}(v + T(v)) \in V_1$ e $\frac{1}{2}(v - T(v)) \in V_{-1}$; pertanto $V = V_1 \oplus V_{-1}$ e quindi T è diagonalizzabile.

Esercizio 13.30 Se $v_0 \neq O$ è un autovettore relativo a $\lambda_0 \neq 0$ allora $v_0 = \frac{1}{\lambda_0} T(v_0) = T\left(\frac{v_0}{\lambda_0}\right) \in \text{Im } T$. Se l'endomorfismo T è diagonalizzabile, indicati con $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gli autovalori non nulli di T , si ha $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k} \oplus \text{Ker } T$ perché $\text{Ker } T$ è l'autospazio relativo all'(eventuale) autovalore $\lambda_0 = 0$. Poiché $\text{Im } T$ è un sottospazio vettoriale di V e $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_k} \subseteq \text{Im } T$, allora $V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k} \subseteq \text{Im } T$ e il calcolo delle dimensioni di tali sottospazi assicura che, grazie al teorema della dimensione, $V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k} = \text{Im } T$, per cui $V = \text{Im } T \oplus \text{Ker } T$. Per provare che il viceversa non è vero, basta considerare $T = L_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; in questo caso $\text{Ker } T = \{O\}$ e $\text{Im } T = \mathbb{R}^2$ e quindi $\text{Im } T$ e $\text{Ker } T$ sono supplementari in $\mathbb{R}^2$, ma T non è diagonalizzabile.

14 Esercizi del Capitolo 14: Il teorema spettrale

Esercizio 14.1 Il Teorema spettrale dice che esiste una base ortonormale che diagonalizza una matrice quadrata se e solo se la matrice è simmetrica; quindi nel nostro caso l'unica matrice per cui non esiste è la quarta, l'unica non simmetrica. Per le altre matrici, le basi cercate si ottengono calcolando prima gli autovalori, poi i relativi autospazi, e infine prendendo una base ortonormale di ciascun autospazio (se l'autospazio ha dimensione 1 questo ultimo passaggio si riduce a trovare nell'autospazio un autovettore di lunghezza unitaria). Usando questo procedimento, possibili basi ortonormali che diagonalizzano le matrici indicate sono, nell'ordine:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{12+6\sqrt{3}}} \begin{bmatrix} -2-\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{12-6\sqrt{3}}} \begin{bmatrix} -2+\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{3} \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{42-2\sqrt{21}}} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{42+2\sqrt{21}}} \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \frac{1}{23} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 22 \end{bmatrix}, \frac{1}{23} \begin{bmatrix} 18 \\ 13 \\ -6 \end{bmatrix}, \frac{1}{23} \begin{bmatrix} 14 \\ -18 \\ 3 \end{bmatrix} \right\},$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 2 \\ -\sqrt{5} \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{5} \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Esercizio 14.2 $T = L_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dove $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $v_0 = e_1$.

Esercizio 14.3 Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalore di un endomorfismo ortogonale A , e sia $v \neq O$ un autovettore di autovalore λ . Allora

$$\|v\|^2 = \langle v, v \rangle = \langle Av, Av \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda^2 \|v\|^2,$$

per cui $\lambda^2 = 1$, cioè $\lambda \in \{-1, 1\}$.

Esercizio 14.4 Se A è diagonalizzabile, allora $\text{sp}_{\mathbb{C}}(A) = \text{sp}_{\mathbb{R}}(A)$ e quindi dall'esercizio precedente $\text{sp}(A)_{\mathbb{C}} \subseteq \{1, -1\}$. Viceversa se $\text{sp}(A)_{\mathbb{C}} \subseteq \{1, -1\}$ allora $\text{sp}_{\mathbb{C}}(A) = \text{sp}_{\mathbb{R}}(A)$ e quindi A è triangolabile; dal Corollario 14.8 segue che esiste $U \in O(n)$ tale che $U^{-1}AU = T$ con T triangolare superiore con 1 e -1 sulla diagonale. Essendo $O(n)$ un gruppo, ne segue che T è anch'essa ortogonale e quindi anche sotto la diagonale principale deve avere tutti 0. Si tratta quindi di una matrice diagonale e pertanto A è diagonalizzabile.

Esercizio 14.7 Ricordando che il determinante di una matrice è uguale al determinante della sua trasposta otteniamo

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_n) = \det(A^T - \lambda I_n^T) = \det(-A - \lambda I_n) \\ &= \det((-1)(A - (-\lambda)I_n)) = (-1)^n \det(A - (-\lambda)I_n) = (-1)^n p_A(-\lambda). \end{aligned}$$

In particolare abbiamo $\det A = p_A(0) = (-1)^n p_A(-0) = (-1)^n \det A$, e quindi se n è dispari segue che $\det A = 0$.

Esercizio 14.8 Se λ_0 è un autovalore di T , la condizione $T^k = \text{id}_V$ implica $\lambda_0^k = 1$, pertanto $\lambda_0 = \pm 1$, essendo λ_0 reale. Gli autospazi di T possono quindi essere soltanto quelli relativi agli autovalori 1 e -1 . Poiché T è diagonalizzabile, si ha $V = V_1 \oplus V_{-1}$ (eventualmente con uno dei due sottospazi dato dal solo vettore nullo), da cui $T^2 = \text{id}_V$.

Esercizio 14.9 Se λ_0 è un autovalore di T , la condizione $T^r = O$ implica $\lambda_0^r = 0$, pertanto $\lambda_0 = 0$. Poiché T è diagonalizzabile, si ha $V = V_0$, da cui $T = O$.

Esercizio 14.10 Se $v_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ è un autovettore relativo all'autovalore λ_0 si ha

$$\begin{aligned}\lambda_0 \|v_0\|^2 &= \langle \lambda_0 v_0, v_0 \rangle = \langle Av_0, v_0 \rangle = v_0^T Av_0 = -v_0^T (-A)v_0 = -v_0^T (A)^T v_0 \\ &= -(Av_0)^T v_0 = -\langle v_0, Av_0 \rangle = -\langle v_0, \lambda_0 v_0 \rangle = -\lambda_0 \|v_0\|^2,\end{aligned}$$

da cui, essendo $v_0 \neq O$, ottieni $\lambda_0 = -\lambda_0$ e quindi $\lambda_0 = 0$.

Esercizio 14.11 Se $\lambda_0 \in \text{sp}(A)$, allora $\lambda_0^2 \in \text{sp}(A^2)$. Poiché A^2 è simmetrica, allora $\lambda_0^2 \in \mathbb{R}$. Hai quindi che $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, il che non può essere per l'esercizio precedente, oppure $\lambda_0 \in i\mathbb{R}$.

Esercizio 14.12 Se $A^T = cA$, allora $A = (A^T)^T = (cA)^T = c(A^T) = c(cA) = c^2 A$. Essendo A non nulla, si ottiene $c^2 = 1$ e quindi $c = \pm 1$.

Esercizio 14.13 Dall'ipotesi segue che per ogni $v, w \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\begin{aligned}0 &= \langle L_A(v+w), v+w \rangle = \langle L_A(v), v \rangle + \langle L_A(v), w \rangle + \langle L_A(w), v \rangle + \langle L_A(w), w \rangle \\ &= \langle L_A(v), w \rangle + \langle L_A(w), v \rangle = \langle L_A(v), w \rangle + \langle v, L_A(w) \rangle.\end{aligned}$$

Quindi per ogni $v, w \in \mathbb{R}^n$ si ha $w^T Av = -(Aw)^T v = -w^T A^T v$, da cui segue che $-A^T = A$, cioè A è antisimmetrica.

Esercizio 14.14 Essendo A simmetrica, esiste $U \in O(n)$ tale che $U^{-1}AU = D$, dove

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} \text{ diagonale. Prendendo } B = U^{-1} \Delta U \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \text{ dove } \Delta = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt[3]{d_n} \end{pmatrix}$$

è la matrice diagonale sulla cui diagonale ci sono le radici cubiche degli elementi della diagonale di D , si trova una matrice tale che $B^3 = A$. Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ non esiste $C \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ tale che $C^2 = A$ perché $\det A = -1$ non può essere uguale a $\det(C^2) = (\det C)^2$ per alcuna matrice a coefficienti reali.

Esercizio 14.15 Per la prima matrice $e_1, \frac{1}{\sqrt{5}}(e_2 - 2e_3), \frac{1}{\sqrt{5}}(2e_2 + e_3)$; per la seconda $e_2, e_3, \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_4), \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_4)$; per la terza non esiste.

Esercizio 14.16 Ricorda che una matrice è triangolabile su $\mathbb{R}$ se e solo se i suoi autovalori sono tutti reali; che è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ se e solo se i suoi autovalori sono tutti reali e con molteplicità algebrica uguale alla molteplicità geometrica; e che è diagonalizzabile da una base ortonormale se e solo se è simmetrica.

Il polinomio caratteristico della prima matrice è $(1 - \lambda)(\lambda^2 - ab)$; quindi la matrice è triangolabile se e solo se $ab \geq 0$, diagonalizzabile da una base ortonormale se e solo se $a = b$, e diagonalizzabile se e solo se $ab > 0$ oppure $a = b = 0$. Se $ab > 0$ una base che la diagonalizza

$$\text{è } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{1+(a/b)} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{a/b} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}; \text{ se } a = b \text{ questa è anche una base ortonormale}$$

che la diagonalizza. Se $b = 0$ la base canonica la triangolarizza (e la diagonalizza rispetto a una base ortonormale se $a = b = 0$). Infine, se $a = 0$ ma $b \neq 0$ una base che la triangolarizza è $\{e_1, e_3, e_2\}$.

Il polinomio caratteristico della seconda matrice è $(1 - \lambda)(\lambda^2 - (1 + a)\lambda + a + b - 1)$; quindi la matrice è triangolabile se e solo se $\Delta = a^2 - 2a + 5 - 4b \geq 0$, ed è diagonalizzabile da una base ortonormale se e solo se $b = -1$. Se $a^2 - 2a + 5 - 4b > 0$ e $b \neq 1$ allora i tre autovalori sono distinti, per cui la matrice è diagonalizzabile. Se $b = 1$, l'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 2 (o addirittura 3 se $a = 1$) ma molteplicità geometrica 1, per cui la matrice non è diagonalizzabile. Se $a^2 - 2a + 5 - 4b = 0$ e $b \neq 1$ allora l'autovalore $(1 + a)/2$ ha molteplicità algebrica 2 ma molteplicità geometrica 1, per cui la matrice non è diagonalizzabile. Se $\Delta > 0$ una base che la triangolarizza (e che la diagonalizza se $b \neq 1$ e la diagonalizza rispetto a una base ortonormale

$$\text{se } b = -1) \text{ è } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 - a + \sqrt{\Delta} \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{8+(1-a+\sqrt{\Delta})^2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 - a - \sqrt{\Delta} \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\text{Se } b = 1 \text{ e } a \neq 1 \text{ allora } \Delta = (a-1)^2 > 0 \text{ e una base che la triangolarizza è } \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1-a \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Se $b = 1 = a$ allora $\Delta = 0$ e una base che la triangolarizza è $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Infine, se $\Delta = 0$

e $b \neq 1$ allora una base che la triangolarizza è $\left\{ \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1-a \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Il polinomio caratteristico della terza matrice è $(a - \lambda)(\lambda - 2)\lambda$; quindi la matrice è sempre triangolabile, ed è diagonalizzabile da una base ortonormale se e solo se $b = 0$. Se $a \neq 0, 2$ allora i tre autovalori sono distinti, per cui la matrice è diagonalizzabile. Se $b \neq 0$ e $a = 0$ oppure $a = 2$ allora l'autovalore a ha molteplicità algebrica 2 ma molteplicità geometrica 1, per cui la matrice non è diagonalizzabile. Una base che la triangolarizza (e che la diagonalizza se $a \neq 0, 2$, rispetto

a una base ortonormale se $b = 0$) è $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{b^2 + b^2(a-1)^2 + a^2(a-2)^2}} \begin{pmatrix} a(a-2) \\ b(a-1) \\ b \end{pmatrix} \right\}$. Se

$a = 0$ o $a = 2$ una base che la triangolarizza (e la diagonalizza rispetto a una base ortonormale se $b = 0$) è $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Il polinomio caratteristico della quarta matrice è $(b - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - a)$; quindi la matrice è triangolabile se e solo se $a \geq 0$, e diagonalizzabile da una base ortonormale se e solo se $a = 1$. Se $a > 0$ e $b \neq 1 \pm \sqrt{a}$ i tre autovalori sono distinti, per cui la matrice è diagonalizzabile. Se $a > 0$ e $b = 1 \pm \sqrt{a}$ l'autovalore b ha molteplicità algebrica e molteplicità geometrica 2, per cui la matrice è ancora diagonalizzabile. Se $a = 0$ e $b \neq 1$ l'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1, per cui la matrice non è diagonalizzabile. Infine, se $a = 0$ e $b = 1$ l'autovalore 1 ha molteplicità algebrica 3 e molteplicità geometrica 2, per cui la matrice non è diagonalizzabile. Se $a > 0$ una base che la triangolarizza (e diagonalizza, e diagonalizza rispetto a una base ortonormale

se $a = 1$) è $\left\{ \frac{1}{\sqrt{1+a}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{a} \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1+a}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{a} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Infine, se $a = 0$ la base canonica la triangolarizza.

Il polinomio caratteristico della quinta matrice è $(a - \lambda)(\lambda^2 - a\lambda - a^2 - 1)$; quindi i tre autovalori sono sempre distinti, per cui la matrice è sempre diagonalizzabile, e non è mai diagonalizzabile da una base ortonormale perché non è simmetrica per alcun valore di a . Se $a \neq 0$ una

base che la diagonalizza è $\left\{ \begin{pmatrix} a^2 + a + 2 \\ -a^2 - 1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a + 2 + \sqrt{5a^2 + 4} \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a + 2 - \sqrt{5a^2 + 4} \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix} \right\}$, mentre

se $a = 0$ una base che la diagonalizza è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Esercizio 14.18 $A = \begin{pmatrix} p & 1 \\ 3p - p^2 - 2 & 3 - p \end{pmatrix}$.

Esercizio 14.19 Se $\det A < 0$, allora $p_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr} A \lambda + \det A$ ha discriminante strettamente positivo e quindi radici reali e distinte, pertanto è diagonalizzabile. Se $\det A = 0$, allora $p_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr} A \lambda$ ha radici reali, quindi è triangolabile. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ non è triangolabile perché $p_B(\lambda) = \lambda^2 + 1$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non è diagonalizzabile perché l'unico autovalore è 0 con molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1.

Esercizio 14.20 Per ogni $v, w \in V$ abbiamo

$$\langle S_u(v), w \rangle = \langle v - 2\langle v, u \rangle u, w \rangle = \langle v, w \rangle - 2\langle v, u \rangle \langle u, w \rangle = \langle v, w - 2\langle w, u \rangle u \rangle = \langle v, S_u(w) \rangle,$$

per cui S_u è simmetrico. Poi

$$\langle S_u(v), S_u(w) \rangle = \langle v - 2\langle v, u \rangle u, w - 2\langle w, u \rangle u \rangle = \langle v, w \rangle - 4\langle w, u \rangle \langle v, u \rangle + 4\langle v, u \rangle \langle w, u \rangle \|u\|^2 = \langle v, w \rangle,$$

per cui S_u è un'isometria. Infine, $S_u(v) = v$ per ogni $v \in V_1$ e $S_u(u) = -u$; quindi una base ortonormale di autovettori di S_u si ottiene aggiungendo u a una base ortonormale di V_1 .

$$\text{Esercizio 14.21} \quad A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}; U = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} -5\sqrt{6} & -10\sqrt{6} & 5\sqrt{6} \\ -12\sqrt{5} & 6\sqrt{5} & 0 \\ \sqrt{30} & 2\sqrt{30} & 5\sqrt{30} \end{bmatrix}.$$

Esercizio 14.25 Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ gli autovalori di A . Allora dal Corollario 13.5 si ha che $\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ e $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$. Quindi la disuguaglianza di Hadamard è equivalente a

$$(\lambda_1 \cdots \lambda_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n),$$

che è la classica disuguaglianza fra la media geometrica (a sinistra) e la media aritmetica (a destra). Per completezza, ne riportiamo qui la dimostrazione. Se anche uno solo dei λ_j è nullo la disuguaglianza è ovviamente verificata; supponiamo allora che siano tutti positivi, e procediamo per induzione su n . Per $n = 1$ non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo allora che la disuguaglianza sia verificata per $n - 1$ numeri, e cerchiamo di dimostrarla per n . Indichiamo con α la media aritmetica di $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Se $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \alpha$ allora la disuguaglianza è banalmente verificata (ed è anzi un'uguaglianza). Se invece i λ_j non sono tutti uguali, ce ne dev'essere uno più grande di α e uno più piccolo di α ; a meno dell'ordine possiamo supporre che $\lambda_n > \alpha > \lambda_{n-1}$. Poniamo $\mu = \lambda_n + \lambda_{n-1} - \alpha$, in modo da avere

$$\mu\alpha - \lambda_{n-1}\lambda_n = (\lambda_{n-1} + \lambda_n - \alpha)\alpha - \lambda_{n-1}\lambda_n = (\lambda_n - \alpha)(\alpha - \lambda_{n-1}) > 0.$$

Siccome $\mu \geq \lambda_n - \alpha > 0$, possiamo applicare l'ipotesi induttiva agli $n - 1$ numeri $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}, \mu$, ottenendo

$$(\lambda_1 \cdots \lambda_{n-2}\mu)^{1/(n-1)} \leq \frac{1}{n-1}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-2} + \mu).$$

Ora, $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-2} + \mu = n\alpha - \alpha = (n-1)\alpha$; quindi abbiamo

$$\alpha^{n-1} \geq \lambda_1 \cdots \lambda_{n-2}\mu.$$

Moltiplicando entrambi i membri per $\alpha > 0$ e ricordando che $\mu\alpha > \lambda_{n-1}\lambda_n$ otteniamo

$$\alpha^n \geq \lambda_1 \cdots \lambda_{n-2}(\mu\alpha) > \lambda_1 \cdots \lambda_{n-2}\lambda_{n-1}\lambda_n,$$

che è la disuguaglianza cercata.

Esercizio 14.27 $\langle, \rangle_1$ è semidefinito positivo, $\langle, \rangle_2$ è definito positivo.

Esercizio 14.28 Il polinomio caratteristico di questa matrice è

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + (2a + 9)\lambda^2 - (11a + 3)\lambda - 4(a + 1).$$

Per il Teorema 14.10 e il criterio di Cartesio, la matrice è definita positiva se e solo se i coefficienti di questo polinomio hanno segni alternati. Siccome il coefficiente di λ^3 è $-1 < 0$, la matrice è definita positiva se e solo se $2a + 9 > 0$, $-(11a + 3) < 0$ e $-4(a + 1) > 0$. Risolvendo queste disequazioni troviamo $a > -9/2$, $a > -3/11$ e $a < -1$, che sono incompatibili; quindi il prodotto scalare rappresentato da questa matrice non è mai definito positivo.

Esercizio 14.30 Poiché A e A' sono congruenti, esiste $C \in GL_n(\mathbb{R})$ tale che $A' = C^T A C$, da cui $\det A' = \det(C^T) \det A \det C = (\det C)^2 \det A$; pertanto $\det A$ e $\det A'$ sono concordi.

Esercizio 14.31 Sia $\mathcal{B}_0$ una base ortonormale per $\langle, \rangle_0$: rispetto ad essa la matrice associata a $\langle, \rangle_0$ è l'identità, mentre la matrice associata a $\langle, \rangle_1$ è simmetrica. Il Corollario 14.4 garantisce l'esistenza di $U \in O(n)$ tale che $U^{-1}AU$ è diagonale; quindi la base $\mathcal{B}$ tale che U è la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}_0$ a $\mathcal{B}$ è ortonormale per $\langle, \rangle_0$ e ortogonale per $\langle, \rangle_1$.

Esercizio 14.32 Osserviamo innanzitutto che S è definita positiva se e solo se ha tutti gli autovalori positivi. Se S ha tutti gli autovalori positivi, essendo simmetrica esiste $U \in O(n)$ tale che $S = U^{-1}DU$ con D diagonale che ha sulla diagonale tutti gli autovalori di S . Basta allora prendere $C = U^{-1}\Delta U$, dove Δ diagonale che ha sulla diagonale le radici quadrate degli autovalori di S per ottenere $S = C^2$ con C simmetrica. Viceversa, se $S = C^2$ per una opportuna C simmetrica, allora fra gli autovalori di S ci sono tutti i quadrati degli autovalori di C ; essendo C simmetrica, tale matrice ha n autovalori reali contati con la loro molteplicità e quindi S ha n autovalori reali positivi contati con la loro molteplicità.

15 Esercizi del Capitolo 15: Coniche e quadriche

Esercizio 15.1 (1) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$.

(2) $y = x^2 - 4$.

(3) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

(4) $xy = -6$.

Esercizio 15.2 1) È la retta di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 4, \\ y = 2 + t. \end{cases}$

(2) È la retta di equazioni parametriche $\begin{cases} x = -2 + \frac{1}{2}t, \\ y = -2t. \end{cases}$

(3) È la retta di equazioni parametriche $\begin{cases} x = \frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}t, \\ y = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{5}t. \end{cases}$

(4) È la retta di equazioni parametriche $\begin{cases} x = 3 + \frac{3}{2}t, \\ y = -2 + t. \end{cases}$

Esercizio 15.3 S è simile alla matrice diagonale che ha tutti 0 sulla diagonale, quindi alla matrice nulla ed è pertanto anch'essa nulla. Se $\mathcal{A}_n$ avesse tutti gli autovalori nulli, allora sarebbe la matrice nulla e quindi il polinomio p sarebbe di grado 1.

Esercizio 15.5 Tutte le coniche dell'Esempio 15.3 sono a centro salvo (c) (parabola); tutte le quadriche dell'Esempio 15.4 sono a centro salvo (e), (f) e (l) (paraboloide ellittico, paraboloide iperbolico, cilindro parabolico).

Esercizio 15.6 (a) $\text{rg } A = 3$, $\det A = -1$, $\text{rg } \mathcal{A}_2 = 2$, $\det \mathcal{A}_2 = 1$, indefinito, definito; (b) $\text{rg } A = 3$, $\det A = 1$, $\text{rg } \mathcal{A}_2 = 2$, $\det \mathcal{A}_2 = -1$, indefinito, indefinito; (c) $\text{rg } A = 3$, $\det A = -\frac{1}{4}$, $\text{rg } \mathcal{A}_2 = 1$, $\det \mathcal{A}_2 = 0$, indefinito, semidefinito; (d) $\text{rg } A = 3$, $\det A = 1$, $\text{rg } \mathcal{A}_2 = 2$, $\det \mathcal{A}_2 = 1$, definito, definito; (e) $\text{rg } A = 2$, $\det A = 0$, $\text{rg } \mathcal{A}_2 = 2$, $\det \mathcal{A}_2 = -1$, indefinito, indefinito; (f) $\text{rg } A = 2$, $\det A = 0$, $\text{rg } \mathcal{A}_2 = 2$, $\det \mathcal{A}_2 = 1$, definito, semidefinito; (g) $\text{rg } A = 2$, $\det A = 0$, $\text{rg } \mathcal{A}_2 = 1$, $\det \mathcal{A}_2 = 0$, semidefinito, indefinito; (h) $\text{rg } A = 2$, $\det A = 0$, $\text{rg } \mathcal{A}_2 = 1$, $\det \mathcal{A}_2 = 0$, semidefinito, semidefinito; (i) $\text{rg } A = 1$, $\det A = 0$, $\text{rg } \mathcal{A}_2 = 1$, $\det \mathcal{A}_2 = 0$, semidefinito, semidefinito. In nessuna coppia si trovano gli stessi valori di $\text{rg } A$, $\text{rg } \mathcal{A}_2$ e segni dei prodotti scalari, quindi non esistono coppie di coniche affinementemente equivalenti nella lista.

Esercizio 15.8 Le matrici associate alla prima conica sono rispettivamente $A = \begin{vmatrix} 1 & 3/2 & 4 \\ 3/2 & 1 & 7/2 \\ 4 & 7/2 & 0 \end{vmatrix}$

e $\mathcal{A}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{vmatrix}$. Siccome $\det A = 55/4 \neq 0$ e $\det \mathcal{A}_2 = -5/4 < 0$, la conica è un'iperbole.

Il suo centro C è la soluzione del sistema $\mathcal{A}_2 x = -\begin{vmatrix} 4 \\ 7/2 \end{vmatrix}$, e quindi è $C = \begin{vmatrix} -1 \\ -2 \end{vmatrix}$. Gli assi sono le rette passanti per C con vettori direttori autovettori di $\mathcal{A}_2$; quindi hanno equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -1 + t, \\ y = -2 + t, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = -1 + t, \\ y = -2 - t. \end{cases}$$

Le matrici associate alla seconda conica sono $A = \begin{vmatrix} 2 & 5/2 & -3/2 \\ 5/2 & 14 & 9 \\ -3/2 & 9 & 0 \end{vmatrix}$ e $\mathcal{A}_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5/2 \\ 5/2 & 14 \end{vmatrix}$.

Siccome $\det A = -261 \neq 0$ e $\det \mathcal{A}_2 = 87/4 > 0$, la conica è un'ellisse. Il suo centro C è la soluzione del sistema $\mathcal{A}_2 x = -\begin{vmatrix} -3/2 \\ 9 \end{vmatrix}$, e quindi è $C = \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix}$. Gli assi sono le rette passanti per C

con vettori direttori autovettori di $\mathcal{A}_2$; quindi hanno equazioni parametriche $\begin{cases} x = 2 + \frac{1}{5}t, \\ y = -1 + t, \end{cases}$ e

$$\begin{cases} x = 2 - 5t, \\ y = -1 + t. \end{cases}$$

Esercizio 15.10 $x^2 + y^2 - 1 = 0$, centro $(-2, 1)$, assi $2x + 5 = y$ e $x + 2y = 0$.

40 Soluzioni degli esercizi

Esercizio 15.11 Le matrici associate alla prima conica sono $A = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$ e $\mathcal{A}_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$.

Siccome $\det A = -17 \neq 0$ e $\det \mathcal{A}_2 = 6 > 0$, la conica è un'ellisse reale, di forma canonica affine $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Le matrici associate alla seconda conica sono $A = \begin{vmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -3/2 \\ 1/2 & -3/2 & 4 \end{vmatrix}$ e $\mathcal{A}_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{vmatrix}$.

Siccome $\det A = -7/4 \neq 0$ e $\det \mathcal{A}_2 = -1/4 < 0$, la conica è un'iperbole, di forma canonica affine $x^2 - y^2 - 1 = 0$.

Le matrici associate alla terza conica sono $A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ e $\mathcal{A}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$. Siccome $\det A = 3 \neq 0$ e $\det \mathcal{A}_2 = -7 < 0$, la conica è un'iperbole, di forma canonica affine $x^2 - y^2 - 1 = 0$.

Le matrici associate alla quarta conica sono $A = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ e $\mathcal{A}_2 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$. Siccome

$\det A = -16 \neq 0$ e $\det \mathcal{A}_2 = 0$, la conica è una parabola, di forma canonica affine $x^2 - y = 0$.

Esercizio 15.12 Non degenera se e solo se $k \neq -5$, forma canonica affine $x^2 + y^2 - 1 = 0$ se $k > -5$, $x^2 + y^2 + 1 = 0$ se $k < -5$.

Esercizio 15.13 $k < -1$ e $k > 1$ ellisse (reale), $k = \pm 1$ parabola, $0 < |k| < 1$ iperbole, $k = 0$ coppia di rette reali incidenti; $k < -1$ e $-1 < k < \frac{1}{2}$ iperbole, $k = -1$ coppia di rette reali incidenti, $k = \frac{1}{2}$ parabola, $k > \frac{1}{2}$ ellisse (reale); non definita se $k < 0$, $k = 0$ coppia di rette reali coincidenti, $0 < k < \frac{3}{2}$ ellisse (reale), $k = \frac{3}{2}$ coppia di rette immaginarie incidenti, $k > \frac{3}{2}$ ellisse immaginaria; $k < 4$ iperbole, $k = 4$ coppia di rette immaginarie incidenti, $k > 4$ ellisse immaginaria.

Esercizio 15.14 paraboloide ellittico, paraboloide ellittico, iperboloide iperbolico (a una falda), iperboloide ellittico (a due falde), iperboloide iperbolico (a una falda), iperboloide iperbolico (a una falda), iperboloide iperbolico (a una falda).

Esercizio 15.15 Le matrici associate alla prima quadrica sono $A = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 3/2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 3/2 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ e

$\mathcal{A}_3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. Siccome $\det A = -6 \neq 0$, la quadrica è non degenera. Siccome $\text{rg } \mathcal{A}_3 = 2$,

la quadrica è un paraboloide. Il polinomio caratteristico di $\mathcal{A}_3$ è $-\lambda^3 + 7\lambda^2 - 6\lambda$; il criterio di Cartesio allora ci dice che $\mathcal{A}_3$ ha due autovalori positivi, per cui la quadrica è un paraboloide ellittico, di forma canonica affine $x^2 + y^2 - z = 0$. Una base ortonormale di autovettori

di $\mathcal{A}_3$ è $\left\{ \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right\}$; effettuando il cambiamento di coordinate $\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} = B^T \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$, do-

ve $B = \begin{vmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ è la matrice che contiene per colonne i vettori della base trovata,

l'equazione della quadrica diventa

$$6(x')^2 + (y')^2 + \frac{6}{\sqrt{5}}x' - \frac{3}{\sqrt{5}}y' - 2z' = 0,$$

dove $\{6, 1, 0\}$ sono gli autovalori di $\mathcal{A}_3$, e i coefficienti dei termini di primo grado sono ottenuti cal-

colando $B^T \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6/\sqrt{5} \\ -3/\sqrt{5} \\ -2 \end{vmatrix}$. Applicando ora il cambiamento di coordinate $\begin{cases} X' = x' + \frac{1}{2\sqrt{5}}, \\ Y' = y' - \frac{3}{2\sqrt{5}}, \\ Z' = z', \end{cases}$

e poi dividendo per 2 come indicato nel caso (D.2), l'equazione della quadrica diventa

$$3(X')^2 + \frac{1}{2}(Y')^2 - Z' - \frac{3}{8} = 0.$$

Effettuando infine il cambio di coordinate $\begin{cases} X'' = \sqrt{3}X', \\ Y'' = \frac{1}{\sqrt{2}}Y', \\ Z'' = Z' + \frac{3}{8}, \end{cases}$ l'equazione della quadrica arriva alla forma canonica affine $(X'')^2 + (Y'')^2 - Z'' = 0$. Riassumendo, un cambio di coordinate che riduce la quadrica in forma canonica affine si ottiene componendo i cambi di coordinate indicati, e quindi è dato da

$$\begin{cases} X'' = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}(2x + y + \frac{1}{2}), \\ Y'' = \frac{1}{\sqrt{10}}(-x + 2y - \frac{3}{2}), \\ Z'' = z + \frac{3}{8}. \end{cases}$$

Le due matrici associate alla seconda quadrica sono $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 1 & 3\sqrt{2}/2 & 3 \end{vmatrix}$ e

$\mathcal{A}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Siccome $\det A = 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) \neq 0$, la quadrica è non degenera. Siccome

$\text{rg } \mathcal{A}_3 = 2$, la quadrica è un paraboloide. Il polinomio caratteristico di $\mathcal{A}_3$ è $-\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda$; il criterio di Cartesio allora ci dice che $\mathcal{A}_3$ ha due autovalori positivi, per cui la quadrica è un paraboloide ellittico, di forma canonica affine $x^2 + y^2 - z = 0$. Una base ortonormale di autovettori

di $\mathcal{A}_3$ è $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right\}$; effettuando il cambiamento di coordinate $\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} = B^T \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$,

dove $B = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix}$ è la matrice che contiene per colonne i vettori della base trovata, l'equazione della quadrica diventa

$$2(x')^2 + (y')^2 + 4x' + 2y' + 2z' + 3 = 0,$$

dove $\{2, 1, 0\}$ sono gli autovalori di $\mathcal{A}_3$, e i coefficienti dei termini di primo grado sono ottenuti

calcolando $B^T \begin{vmatrix} \sqrt{2} \\ 2 \\ 3\sqrt{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}$. Applicando ora il cambiamento di coordinate $\begin{cases} X' = x' + 1, \\ Y' = y' + 1, \\ Z' = z', \end{cases}$ e

poi dividendo per -2 come indicato nel caso (D.2), l'equazione della quadrica diventa

$$-(X')^2 - \frac{1}{2}(Y')^2 - Z' = 0.$$

Moltiplicando per -1 ed effettuando infine il cambio di coordinate $\begin{cases} X'' = X', \\ Y'' = \frac{1}{\sqrt{2}}Y', \\ Z'' = -Z', \end{cases}$ l'equazione

della quadrica arriva alla forma canonica affine $(X'')^2 + (Y'')^2 - Z'' = 0$. Riassumendo, un cambio di coordinate che riduce la quadrica in forma canonica affine si ottiene componendo i cambi di coordinate indicati, e quindi è dato da

$$\begin{cases} X'' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z + 1, \\ Y'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(y + 1), \\ Z'' = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}z. \end{cases}$$

Esercizio 15.16 Per $k < -1$ iperboloide ellittico, per $k = -1$ cono reale, per $k > -1$ iperboloide iperbolico.

Esercizio 15.17 Le due matrici associate alla quadrica sono $A = \begin{vmatrix} 1 & 2k & 0 & 0 \\ 2k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ e

$\mathcal{A}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2k & 0 \\ 2k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$. Siccome $\det A = 0$, la quadrica è sempre degenera. Inoltre $\text{rg}(A) = \text{rg}(\mathcal{A}_3)$

42 Soluzioni degli esercizi

per ogni valore di k ; quindi la quadrica è sempre a centro. Siccome $\det \mathcal{A}_3 = 4k^2 - 1$, si verifica subito che $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(\mathcal{A}_3) = 3$ se $k \neq \pm 1/2$ e $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(\mathcal{A}_3) = 2$ se $k = \pm 1/2$. Il polinomio caratteristico di $\mathcal{A}_3$ è $-\lambda^3 + \lambda^2 + (4k^2 + 1)\lambda + 4k^2 - 1$; quindi $\mathcal{A}_3$ ha un autovalore positivo e due negativi se $4k^2 - 1 > 0$, un autovalore positivo, uno negativo e uno nullo se $4k^2 - 1 = 0$, e due autovalori positivi e uno negativo se $4k^2 - 1 < 0$. Quindi la forma canonica affine è $x^2 + y^2 - z^2$ (cono reale) se $k \neq \pm 1/2$, ed è $x^2 - y^2$ (piani reali incidenti) se $k = \pm 1/2$.

Esercizio 15.18 paraboloide iperbolico; intersezione con $x = 0$ parabola; intersezione con $y = 0$ iperbole; intersezione con $z = 0$ parabola.

Esercizio 15.19 La conica cercata ha equazioni $\begin{cases} x^2 + 2xz - y^2 + 2z - 5 = 0, \\ x - ky - z = k. \end{cases}$. Ricavan-

do z dalla seconda equazione e sostituendola nella prima otteniamo che l'equazione della conica nel piano π_k è data da $3x^2 - 2kxy - y^2 + 2(k+1)x - 2ky + 2k - 5 = 0$. (In modo equivalente,

potevamo fare il cambio di coordinate $\begin{cases} X = x, \\ Y = y, Z = z - x + ky + k; \end{cases}$; nelle nuove coordinate, il piano π_k ha equazione $Z = 0$, per cui la conica cercata è contenuta nel piano coordinato e

ha equazione quella indicata.) Le matrici associate alla conica sono $A = \begin{bmatrix} 3 & -k & k+1 \\ -k & -1 & -k \\ k+1 & -k & 2k-5 \end{bmatrix}$ e

$\mathcal{A}_2 = \begin{bmatrix} 3 & -k \\ -k & -1 \end{bmatrix}$. Siccome $\det A = 5k^2 - 4k + 16$ non si annulla mai, la conica è sempre non degenera. Siccome $\det \mathcal{A}_2 = -k^2 - 3$ è sempre negativo, ne deduciamo che la conica è sempre un'iperbole, con forma canonica affine $x^2 - y^2 - 1 = 0$.

Esercizio 15.20 Per ogni $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 15.21 $\forall k \neq \frac{23}{24}$.

Esercizio 15.23 Se $\lambda + \mu = 0$ la conica è la retta $x + y - 1 = 0$. Se $\lambda = 0$ e $\mu \neq 0$ la conica è la coppia di rette reali incidenti $x + y = 0$ e $x - y - 1 = 0$. Se $\lambda + \mu \neq 0$ e $\lambda \neq 0$ la conica è un'iperbole con asintoti paralleli alle bisettrici dei quadranti; quando $\lambda + \mu \neq 0$ il centro della conica è dato da $\left(-\frac{\mu}{2(\lambda+\mu)}, \frac{\mu}{2(\lambda+\mu)}\right)$ che si trova sulla bisettrice del secondo e del quarto quadrante, in particolare se $\mu \neq 0$ e $\frac{\lambda}{\mu} < -1$ tale punto giace nel secondo quadrante, se $\mu \neq 0$ e $\frac{\lambda}{\mu} > -1$ giace nel quarto; se $\mu \neq 0$ quando λ/μ tende a -1 si allontana dall'origine.

Esercizio 15.26 $24x^2 - 62xy + 13y^2 - 62x + 37y = 0$

Esercizio 15.27 Procediamo come nell'Esempio 15.11. La prima conica del fascio è composta dalla retta passante per $(0, 0)$ e $(1, 1)$ e dalla retta tangente; quindi è definita dal polinomio $p(x, y) = (x - y)(2x - y - 1)$. La seconda conica del fascio è composta dalla retta passante per $(0, -1)$ e $(0, 0)$, e dalla retta passante per $(0, -1)$ e $(1, 1)$; quindi è definita dal polinomio $q(x, y) = x(2x - y - 1)$. La generica conica del fascio è dunque data dal polinomio

$$\lambda p(x, y) + \mu q(x, y) = (2\lambda + 2\mu)x^2 - (3\lambda + \mu)xy + \lambda y^2 - (\lambda + \mu)x + \lambda y.$$

Imponendo la condizione di passaggio per $(2, 7)$ otteniamo $20\lambda - 8\mu = 0$; prendendo $\lambda = 2$ e $\mu = 5$ troviamo quindi la conica cercata, di equazione

$$14x^2 - 11xy + 2y^2 - 7x + 2y = 0;$$

è una conica degenera data da due rette incidenti, di equazione $2x - y - 1 = 0$ e $7x - 2y = 0$.

Esercizio 15.28 Va bene qualsiasi coppia di rette di cui una sia $x - y = 0$, che contiene quindi i punti $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$ e $(-1, -1)$, e l'altra contenga $(1, -1)$.

Esercizio 15.29 Una tale conica non esiste perché la retta $3x - 2y + 1 = 0$ non passa per il punto $(0, 1)$.

Esercizio 15.31 $k = -13 \pm 7\sqrt{6}$.